COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 5 punti.

Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. Determinare le soluzioni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ del sistema lineare

$$\begin{cases} (i-1)x + iy = 2 \\ 2x + (1-i)y = -2 - 2i. \end{cases}$$

Sol.: La matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{cc|c} (i-1) & i & 2 \\ 2 & 1-i & -2-2i \end{array} \right)$$

oppure, scambiando le righe,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1-i & -2-2i \\ (i-1) & i & 2 \end{array} \right).$$

Applichiamo l'eliminazione di Gauss: sostituendo la seconda riga R_2 con $R_2 - \frac{1}{2}(i-1)R_1$, troviamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1-i & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Quindi il sistema di partenza è equivalente all'equazione $2x + (1-i)y = -2(1+i)$ ed ha infinite soluzioni

$$\begin{pmatrix} -(1+i) - \frac{(1-i)}{2}y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbf{C}.$$

2. Sia π il piano di equazione $x - y - z = 1$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare due rette perpendicolari fra loro, giacenti sul piano π .

Sol.: Il vettore $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è normale a π e il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a π . Le rette

$$r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad s : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R},$$

soddisfano le richieste del problema: sono parallele al piano π e si incontrano nel punto $P \in \pi$. Dunque appartengono al piano π . Infine, sono ortogonali fra loro.

3. Sia $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare se F è o meno diagonalizzabile, motivando la risposta.

Sol.: Il polinomio caratteristico di A è dato da $P_\lambda(A) = -\lambda(1-\lambda)(\lambda^2-1)$, con radici $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ (doppio). Questo implica innanzitutto $\dim V_0 = \dim V_{-1} = 1$. Dunque F è diagonalizzabile se e solo se $\dim V_1 = 2$. Solo in tal caso infatti esiste una base di $\mathbf{R}^4$ composta da autovettori di A . Abbiamo

$$V_1 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Poiché $\dim V_1 = 1$ è minore della molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$, l'applicazione non è diagonalizzabile.

4. Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcolare $\dim \ker(f^{100})$ (qui f^{100} indica la composizione $f \circ \dots \circ f$ di f con se stessa 100 volte).

Sol.: Osserviamo innanzitutto che $\det(A) = 0$, da cui segue che $\dim \ker(f) \geq 1$. Per capire cosa fa l'applicazione f^{100} , controlliamo se è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A è dato da $p_A(\lambda) = \lambda(1+\lambda)(1-\lambda)$, con autovalori reali e distinti $\lambda = 0, 1, -1$. I rispettivi autospazi hanno tutti dimensione 1. In particolare $\dim \ker(f) = \dim V_0 = 1$. Per calcolare $\dim \ker(f^{100})$ osserviamo che A è diagonalizzabile. Dunque esiste una matrice invertibile M tale che

$$A = M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

da cui

$$A^{100} = M \begin{pmatrix} 0^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{100} \end{pmatrix} M^{-1} = M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

Adesso è chiaro che $\dim \ker(f^{100}) = \dim \ker(f) = \dim V_0 = 1$.

5. Sia data la conica C di equazione $x^2 + 4x + 4xy + 4y^2 + 8y = 0$. Dire di che tipo di conica si tratta e fare un disegno approssimativo di C .

Sol.: La matrice associata alla parte quadratica di C è $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, con autovalori $\lambda = 5$ e $\mu = 0$, e autospazi $V_5 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ e $V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. I vettori $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\right\}$ formano una ortonormale di autovettori di A e il cambiamento di coordinate ortogonale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

porta l'equazione di C nella forma

$$5X^2 + 20/\sqrt{5}X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5X(5X + 4/\sqrt{5}) = 0.$$

Si tratta quindi delle rette parallele di equazioni $X = 0$ e $X = -4/(5\sqrt{5})$.

Alternativamente:

Si ha che $x^2 + 4x + 4xy + 4y^2 + 8y = (x + 2y)^2 + 4(x + 2y) = (x + 2y)(x + 2y + 4)$. Si tratta quindi di due rette parallele. Le equazioni sono $x + 2y = 0$ e $x + 2y + 4 = 0$. etc...

6. Sia $S \subset \mathbf{R}^3$ la sfera di equazione $x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z = 0$ e sia $\pi \subset \mathbf{R}^3$ il piano di equazione $x + y + z + 1 = 0$. L'intersezione $S \cap \pi$ è una circonferenza. Determinarne il raggio.

Sol.: Scriviamo l'equazione di S come

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 3/4,$$

da cui risulta che si tratta della sfera di centro $C = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e raggio $R = \sqrt{3}/2$. Il raggio r della circonferenza $S \cap \pi$ è dato da

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(C, \pi)} = \sqrt{3/4 - d^2\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \pi\right)},$$

dove $d(C, \pi)$ è la distanza da C al piano π . La distanza $d(C, \pi)$ è uguale a $d(Q, \pi)$, dove $Q = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ è il punto di intersezione fra π e la retta per C , perpendicolare a π

$$l: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Conclusione:

$$r = \sqrt{2/3}.$$