COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti.
Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. *Determinare le soluzioni* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ *del sistema lineare*

$$\begin{cases} x + (1+i)y = 1-i \\ (1+i)x + 2iy = 2. \end{cases}$$

Sol.: La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ (1+i) & 2i & 2 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'eliminazione di Gauss: sostuituendo la seconda riga R_2 con $R_2 - (1+i)R_1$, troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 2i-(1+i)(1+i) & 2-(1+i)(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema di partenza è equivalente all'equazione $x + (1+i)y = 1-i$ ed ha infinite soluzioni

$$\begin{pmatrix} (1-i)-(1+i)y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbf{C}.$$

2. *Dati i sottospazi*

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \} \qquad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

(a) Determinare la dimensione di $V \cap W$ *e la dimensione di* $V + W$.
(b) Esibire una base di $V \cap W$ *e una base di* $V + W$.
(c) Determinare se $V \subset W$ *oppure* $W \subset V$.

Sol.: (a) Abbiamo $\dim V = \dim W = 2$. Le soluzioni del sistema lineare formato dalle equazioni di V e di W sono date da

$$\mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Dunque $\dim V \cap W = 1$, e il vettore qui sopra è una base di $V \cap W$. Dalle formule di Grassmann segue che $\dim V + W = 3$ e che una base di $V + W$ è data dai vettori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim V \cap W = 1$, non può valere né $V \subset W$ né $W \subset V$.

3. *Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, *per $t \in \mathbf{R}$. Calcolare un'equazione cartesiana dell'immagine $f(r)$ della retta r tramite l'applicazione lineare $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ data da*

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Sol. I punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartengono ad r. Abbiamo che $f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $f(Q) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sono punti distinti in $\mathbf{R}^2$, per cui la retta $f(r)$ è l'unica retta passante per $f(P)$ ed $f(Q)$. Un'equazione cartesiana di $f(r)$ è data da $x + y = -1$.

4. *Sia* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f(X) = \mathbf{v} \times X$. Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione composta $f \circ f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ (esibirne una base).*

Sol.: Il nucleo di f è $\ker f = \operatorname{span}\{\mathbf{v}\}$ e l'immagine di f è il piano $\mathbf{v}^\perp$ in $\mathbf{R}^3$, di equazione $x + y + z = 0$. Il piano $\mathbf{v}^\perp$ è mandato in se stesso da f. Quindi il nucleo e l'immagine di $f \circ f$ coincidono con il nucleo e l'immagine di f.

Alternativamente:
La matrice rappresentativa di f e quella di $f \circ f$ sono date rispettivamente da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che $\ker(A^2) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}\}$. Una base di $\mathbf{v}^\perp$ è data da $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Inoltre

$$A^2\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

da cui risulta che l'immagine di $f \circ f$ coincide con l'immagine di f, cioè con $\mathbf{v}^\perp$.

5. *Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'insieme dei punti fissi $Fix(F) = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid AX = X\}$.
   (b) Dare un'interpretazione geometrica di F.

Sol.: Osserviamo innanzitutto che A è una matrice ortogonale e simmetrica, quindi è un'isometria lineare ed è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$. L'insieme dei punti fissi $Fix(F) = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid AX = X\}$ coincide con l'autospazio di A di autovalore $\lambda = 1$. Il polinomio caratteristico di A è dato da $p_\lambda(A) = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda)$ ed ha radici $\lambda = -1$, con molteplicità 1 e $\lambda = 1$, con molteplicità 2. L'autospazio V_1 è dato dal piano $x + y = 0$, l'autospazio V_{-1}

è il complemento ortogonale di V_1, ossia la retta span$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Dunque A è la riflessione rispetto al piano $x + y = 0$.

6. *Calcolare il raggio della circonferenza data dall'intersezione della sfera* $S:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$ *col piano* $\pi:\ x + y + z = 1$.

Sol.: Scriviamo l'equazione di S come

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5,$$

da cui risulta che si tratta della sfera di centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio $R = \sqrt{5}$. Il raggio r della circonferenza $S \cap \pi$ è dato da

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(C, \pi)} = \sqrt{5 - d^2(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi)},$$

dove $d(C, \pi)$ è la distanza da C al piano π La distanza $d(C, \pi)$ è uguale a $d(Q, \pi)$, dove $Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ è il punto di intersezione fra π e la retta per C, perpendicolare a π

$$l: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}.$$

Conclusione:

$$r = \sqrt{11/3}.$$