GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 1 Roma, 19 gennaio 2021, ore 10-12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti.
Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ *vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale* V*. Determinare la dimensione del sottospazio* $\mathrm{span}\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{u}-\mathbf{z}, \mathbf{v}-\mathbf{w}\}$.

Sol.: Il sottospazio $U = \mathrm{span}\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{u}-\mathbf{z}, \mathbf{v}-\mathbf{w}\}$ ha dimensione $1 \leq \dim U \leq 4$. Poiché $\mathbf{u}+\mathbf{v}-(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = \mathbf{v}-\mathbf{w}$, si ha $\dim U \leq 3$. Direttamente dalla definizione di lineare indipendenza, si ha

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}+\mathbf{w}) + \gamma(\mathbf{u}-\mathbf{z}) = (\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} - \gamma\mathbf{z} + \beta\mathbf{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dunque $\dim U = 3$.

2. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare data da*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

e sia U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *di equazioni* $\begin{cases} y - z = 0 \\ z - w = 0. \end{cases}$

(a) *Determinare la dimensione di* $\ker F \cap U$.
(b) *Determinare la dimensione dell'immagine* $F(U)$.

Sol.: (a) Risolvendo il sistema lineare omogeneo $F(X) = O$, si trova

$$\ker F = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

In particolare, $\dim \ker F = 1$. Poiché $\ker F$ è contenuto in U (gli elementi di $\ker F$ soddisfano le equazioni di U), si ha che $\dim \ker F \cap U = 1$.
(b) Si ha che

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \dim U = 2,$$

per cui $\dim F(U) = \dim U - \dim \ker F \cap U = 2 - 1 = 1$.

3. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *un'applicazione lineare. Siano* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *autovettori di* F *di autovalori* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ *e* $\lambda_3 = 0$, *rispettivamente.*

(a) *Mostrare che* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *sono una base di* $\mathbf{R}^3$.
(b) *Determinare la matrice rappresentativa di* F *nella base* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *(in dominio e codominio).*
(c) *Determinare la matrice rappresentativa di* F *nella base canonica (in dominio e codominio).*

Sol.: (a) Abbiamo $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. Dunque $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti a formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$.

(b) Direttamente dal fatto che

$$F(\mathbf{u}) = 1 \cdot \mathbf{u}, \quad F(\mathbf{v}) = 1 \cdot \mathbf{v}, \quad F(\mathbf{w}) = 0 \cdot \mathbf{w},$$

segue che la matrice rappresentativa di F nella base $\mathcal{B}$ (in dominio e codominio) è la matrice diagonale, con gli autovalori sulla diagonale principale,

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Dal diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}"] & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \arrow[r, "\widetilde{M}"] & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \arrow[u, "C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}"'] \end{tikzcd}$$

la matrice rappresentativa di F nella base canonica (in dominio e codominio) è data da

$$M = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \widetilde{M} C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \widetilde{M} C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Sia $F \colon V \to V$ un'applicazione lineare non identicamente nulla tale che $F^2 = F \circ F$ è identicamente nulla.*
   (a) Mostrare che tutti gli autovalori di F sono nulli.
   (b) Per $V = \mathbf{R}^2$ dare un esempio esplicito di F come sopra.

Sol.: (a) Sia $\mathbf{v} \neq 0$ un autovettore di F di autovalore λ. Dunque $F(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Applicando F due volte, troviamo

$$F(F(\mathbf{v})) = F(\lambda \mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{v}.$$

Poiché F è identicamente nulla e $\mathbf{v} \neq 0$, si ha che $\lambda = 0$.

(b) Un esempio è $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

5. *Calcolare la distanza del punto P dal sottospazio U, dove*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z - w = 0 \end{cases} \right\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Il punto P non appartiene ad U, quindi $d(P, U) > 0$. Inoltre $d(P, U) = d(P, \pi_U(P))$, dove $\pi_U(P)$ indica la proiezione ortogonale di P su U. Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ è una base ortogonale di U, allora

$$\pi_U(P) = \frac{P \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{P \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2.$$

Nel nostro caso, ad esempio

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\pi_U(P) = 0 \cdot \mathbf{u}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}, \qquad d(P, \pi_U(P)) = \| \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \| = 2\sqrt{10}/5.$$

6. *Sia f la forma quadratica data da $f(X,Y,Z) = XY + YZ + ZX$. Esibire una matrice ortogonale che la porta in forma diagonale. Sia $Q \subset \mathbf{R}^3$ la quadrica data da $f(X,Y,Z) = 1$. Dire di che tipo di quadrica si tratta.*

Sol.: La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, con autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1/2$ e autospazi

$$V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad V_{-1/2} = \{X + Y + Z = 0\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Per determinare una matrice ortogonale che diagonalizza la forma quadratica abbiamo bisogno di una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori di A, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{3/2}.$$

La matrice cercata è $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, che coincide con la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$. Nelle coordinate x, y, z indotte dalla base $\mathcal{B}$, la forma quadratica diventa

$$f(x,y,z) = x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2.$$

In queste coordinate la quadrica $f(X,Y,Z) = 1$ ha equazione $x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 1$, ossia

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 = x^2 - 1,$$

che rappresenta un iperboloide a due falde.