1. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare che F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).
   (iii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F (esibirne una base).
   (iv) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

2. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).
   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F.
   (iii) Cosa fa questa applicazione?

3. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix})$ e $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix})$.
   (ii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F.
   (iii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F (esibirne una base).
   (iv) Cosa fa questa applicazione?

4. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base, se possibile).
   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F (esibirne una base).
   (iii) Dire se F è iniettiva o suriettiva.
   (iv) Calcolare $F(U)$, l'immagine tramite F del sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}$.
   Che dimensione ha?
   (v) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

5. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F (esibirne una base).
   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^4)$, l'immagine di F (esibirne una base).
   (iii) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

(iv) Calcolare l'immagine tramite F del sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\}$.

(v) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

6. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare dell'esercizio 9 e sia $G\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.
   (i) Scrivere la formula generale di $G \circ F$.
   (ii) Calcolare $G \circ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.
   (iii) Calcolare il nucleo $\ker F$ e l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$.
   (iv) Calcolare il nucleo $\ker(G \circ F)$ e l'immagine $G \circ F(\mathbf{R}^4)$.
   (v) Verificare che il nucleo di F è contenuto nel nucleo di $G \circ F$.

7. Sia data l'applicazione lineare

$$L_M\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2, \quad X \mapsto MX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le formule generali per L_M.
(ii) Determinare $\ker L_M$, il nucleo di L_M (esibirne una base).
(iii) Determinare $L_M(\mathbf{R}^4)$, l'immagine di L_M (esibirne una base).
(iv) Determinare l'insieme $A = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid L_M(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

8. Sia data l'applicazione lineare

$$L_M\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad X \mapsto MX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le formule generali per L_M.
(ii) Determinare $\ker L_M$, il nucleo di L_M (esibirne una base).
(iii) Determinare $L_M(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di L_M (esibirne una base).
(iv) Dire se L_M è iniettiva o suriettiva.
(v) Determinare l'insieme $A = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid L_M(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
(vi) Determinare l'insieme $A = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid L_M(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(vii) Sia $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0\}$. Determinare l'immagine di U tramite L_M(esibirne una base).

9. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali.
   (i) Verificare che $\dim L(V) < \dim V$ se e solo se L non è iniettiva.
   (ii) Verificare che se $\dim W < \dim V$, allora L non può essere iniettiva.
   (iii) Verificare che se $\dim V < \dim W$, allora L non può essere suriettiva.

10. Costruire esplicitamente una applicazione lineare $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\dim \ker L = 1$, una applicazione lineare $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\dim \ker L = 2$ e una applicazione lineare $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\dim \ker L = 3$. Che dimensione ha $L(\mathbf{R}^3)$ in ognuno dei vari casi?

11. Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare il rango di M. Scrivere il sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti M e determinare la dimensione dello spazio delle sue soluzioni (anche senza calcolarle). È vero che il sistema lineare non omogeneo $MX = b$ è compatibile per ogni vettore dei termini noti b? È vero che l'applicazione lineare $L_M\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$, $X \mapsto MX$ è suriettiva? (Spiegare bene le risposte).

12. Sia $L_M\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$, $X \mapsto MX$ un'applicazione lineare, dove M è una matrice 3×5. Sapendo che M ha rango 2, determinare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di L_M. Dire se L_M è suriettiva o iniettiva, spiegando bene le risposte.

13. Sia $L\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare se il sottospazio $U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4$ è contenuto nel nucleo di L.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L, cioè la matrice M tale che $L(X) = MX$.
   (c) Determinare il rango di M.
   (d) È vero che $U = \ker L$? Spiegare.
   (e) Determinare l'immagine di L, esibendone una base.
   (f) Determinare l'immagine tramite L del sottospazio $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4$. In base a quanto trovato determinare la dimensione di $\ker L \cap W$.

14. Sia M una matrice $n \times n$ le cui colonne sono un insieme di vettori ortonormali. Spiegare perché l'applicazione lineare $L_M\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è iniettiva e suriettiva.

15. Sia U un piano in $\mathbf{R}^5$. Volendo scrivere U in forma cartesiana (ossia come insieme delle soluzioni di un sistema lineare), quante equazioni indipendenti servono?

16. Sia data la retta $r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$. Scrivere equazioni cartesiane per r, ossia determinare un sistema lineare di cui r sia l'insieme delle soluzioni. Qual è il significato geometrico dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?

17. Sia dato il sistema lineare $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare la soluzione generale di tale sistema. Qual è il significato geometrico dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?

18. Sia data l'equazione lineare $x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare la soluzione generale di tale sistema. Qual è il significato geometrico dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?