1. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, determinare se $F$ è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (iii) Determinare l'immagine tramite $F$ della retta per l'origine $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 1 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, determinare se $F$ è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $3F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix})$. Come si conciliano questi risultati con quanto trovato al punto (i)?

3. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare che $F$ è un'applicazione lineare.
   (ii) È vero che $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, per $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Sia $L\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un polinomio omogeneo di primo grado

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

   Verificare che $L$ è lineare.

5. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di $F$ (esibirne una base).
   (ii) Dire se $F$ è suriettiva.
   (iii) Determinare una base di $F(U)$, dove $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

6. Scrivere la formula generale dell'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ determinata da

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (i) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix})$.
   (ii) Determinare $\dim F(\mathbf{R}^3)$.