

5. Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sia $L_M: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione associata definita da $L_M(X) := M \cdot X$, ossia

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le formule generali per $L_M(X)$ e calcolare

$$L_M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad L_M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad L_M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad L_M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad L_M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- (ii) Verificare che $L_M\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda L_M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

- (iii) Verificare che $L_M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = L_M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) + L_M\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$.

6. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare $M \cdot N$ e $N \cdot M$.

- (ii) Scrivere dominio, codominio e formule generali per le applicazioni $L_{M \cdot N}$ ed $L_{N \cdot M}$.

7. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Siano $L_M: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ed $L_N: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ le applicazioni associate.

- (i) Scrivere le formule generali per L_M ed L_N .

- (ii) Determinare dominio, codominio e formule generali per la composizione

$$L_N \circ L_M(X) = L_N(L_M(X)).$$

- (iii) Determinare dominio, codominio e formule generali per la composizione

$$L_M \circ L_N(X) = L_M(L_N(X)).$$

8. Esibire due matrici M ed N per cui sia definita $M \cdot N$ ma non $N \cdot M$.

9. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} p & q & a & \alpha \\ r & s & b & \beta \\ u & v & c & \gamma \end{pmatrix}$ e siano L_M ed L_N le applicazioni associate.

- (i) Determinare dominio, codominio e formule generali per L_M e L_N .

- (ii) Determinare se le composizioni $L_M \circ L_N$ ed $L_N \circ L_M$ sono ben definite.
- (iii) In caso affermativo, determinarne dominio, codominio e formule generali.

Sia $M(m, n, \mathbf{R})$ lo spazio delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali, e sia $M \in M(m, n, \mathbf{R})$. La *trasposta* di M , che si indica con tM , è per definizione la matrice $n \times m$ che ha per colonne le righe di M (vedi Dispense di Algebra Lineare, alla fine della sez.6).

10. Siano date due matrici $M \in M(m, n, \mathbf{R})$ ed $N \in M(n, k, \mathbf{R})$.

- (i) Verificare che esiste il prodotto ${}^tN \cdot {}^tM$ e che è una matrice delle stesse dimensioni della matrice ${}^t(M \cdot N)$.

- (ii) Date $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} p & q & a & \alpha \\ r & s & b & \beta \\ u & v & c & \gamma \end{pmatrix}$, verificare che ${}^t(M \cdot N) = {}^tN \cdot {}^tM$.