1. Siano dati

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare una base di U e la dimensione di U.
   (b) Verificare che $X \in U$ e determinare le coordinate di X in tale base.

2. Siano dati i polinomi

$$x^2 + x + 1, \quad x - 2, \quad x^2 - 1.$$

   (a) Verificare che formano una base di $R_2[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti costanti.
   (b) Determinare le coordinate di 1, x, x^2 in tale base.
   (c) Qual è il polinomio che nella base $x^2 + x + 1,\ x - 2,\ x^2 - 1$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$?

3. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Determinare le coordinate di $v_1, \ldots, v_n$ in tale base.

4. Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia U un sottospazio e sia U^c un sottospazio complementare a U in V. Verificare che ogni elemento $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in U^c$.

5. *Il prodotto "righe per colonne" fra matrici non è commutativo.* Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e osservare che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

6. *Per il prodotto "righe per colonne" fra matrici non vale il principio dell'annullamento.* Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot B$ e osservare che $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *non* implica $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oppure $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare due matrici B e C quadrate 2×2, diverse tra loro, per cui valga $A \cdot B = A \cdot C$.

8. Considerare lo spazio $M(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici reali 2×2 e siano $A, B, C \in M(2, 2, \mathbf{R})$ matrici arbitrarie.
   (i) Verificare che $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
   (ii) Verificare che $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
   (iii) Verificare che $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$.