1. Esibire due coppie di vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^2$. In ognuno dei casi dimostrare che generano $\mathbf{R}^2$.

2. Esibire due terne di vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^3$. In ognuno dei casi dimostrare che generano $\mathbf{R}^3$.

3. Sia dato il sottoinsieme $S = \{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a+b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare se i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartengono ad S.
   (b) Esibire tre elementi di S.
   (c) Usando la definizione, dimostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
   (d) Determinare dei generatori di S, ossia scrivere S come *span* di opportuni vettori.
   (e) Determinare dei generatori linearmente indipendenti di S.

4. Dato il sistema lineare omogeneo in 4 variabili $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, scrivere le soluzioni come *span* di opportuni vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^4$.

5. Determinare se i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Se non lo sono, sceglierne un sottoinsieme massimale formato da elementi linearmente indipendenti.

6. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in V. Determinare se i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti (suggerimento: usare la definizione).

7. Dati i vettori di $\mathbf{R}^4$

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

   usando l'eliminazione di Gauss per righe, determinare un insieme di generatori linearmente indipendenti di $span\{A, B, C, D, E, F\}$.

8. Sia dato il sottospazio $S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare quali fra i seguenti insiemi di vettori sono basi di S:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}, \quad \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

9. Sia dato il sottospazio $V = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ di $\mathbf{R}^4$.

   (a) Determinare una base di V e la dimensione di V.

   (b) Determinare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a V.

   (c) Determinare se V è contenuto nel sottospazio $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_3 = 0\}$ di $\mathbf{R}^4$.