

1. Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Far vedere che l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da $X \mapsto AX$ è un'isometria.
 (ii) Calcolare autovalori ed autospazi di L_A .
2. Determinare per quali delle seguenti matrici l'applicazione $L_A(X) = AX$ è un'isometria lineare e per quali un'applicazione simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per le isometrie lineari, determinare autovalori e autospazi. In base ad essi provare a darne un'interpretazione geometrica.

Per le applicazioni simmetriche, determinare autovalori e una base ortonormale di autovettori.

3. Per ognuna delle matrici simmetriche qui sotto determinare gli autovalori ed una base ortonormale di autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sia M una matrice reale quadrata 3×3 antisimmetrica. Dimostrare che ha un autovalore nullo.

5. Determinare se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono coniugate, cioè se esiste una matrice invertibile C tale che $B = C^{-1}AC$.