1. Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mediante $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

2. Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mediante $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

3. Sia W un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k. Sia $\pi_W \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la proiezione ortogonale sul sottospazio W.
   (a) Verificare che $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$.
   (b) Determinare il nucleo di π_W e la sua dimensione.
   (c) Determinare $\{X \in \mathbf{R}^n \mid \pi_W(X) = X\}$ e la sua dimensione.
   (d) Concludere che π_W è diagonalizzabile.