

1. Dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$,
- (a) disegnare i vettori $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$, $A - B$, $A - 2B$, $A - 3B$;
 - (b) disegnare tB , per $t \in [0, 1]$;
 - (c) disegnare tC , per $t \in [-1, 0]$;
 - (d) disegnare $A + tB$, per $t \in [0, 1]$;
 - (e) disegnare $A + tB$, per $t \in \mathbf{R}$. Di che insieme si tratta?

2. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = -x_2 \right\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq 2 \right\};$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 > 0 \right\} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 < 1 \right\};$$

- (ii) Dati $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X + Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

- (iii) Decidere quali di questi sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ coincidono:

$$A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbf{R} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}, \quad C = \left\{ -t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$$

$$D = \left\{ -t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}, \quad E = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R} \right\},$$

$$F = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

- (iv) Dati i vettori A , B , C dell'esercizio 1, calcolare:

$$\|A\|, \quad \|-B\|, \quad \|B\|, \quad \|C\|, \quad A \cdot C, \quad (A + B) \cdot B, \quad A \cdot B, \quad \pi_A(A), \quad \pi_A(B),$$

dove $\pi_X(Y)$ indica la proiezione ortogonale di Y su X .

3. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq 0 \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \end{cases} \right\}.$$

4. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : -1 < t < 1 \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

- (ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$O \in U, \quad O \in V, \quad O \in W, \quad Y \in U, \quad \frac{1}{3}Y \in U, \quad 2Y \in V$$

$$X \in W, \quad Y \in W, \quad X + Y \in W, \quad -X \in W, \quad X - Y \in W$$

- (iii) Decidere quali di questi sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ coincidono:

$$A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}, \quad B = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R} \right\}, \quad D = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R} \right\}$$

- (iv) Dati i vettori del punto (ii), calcolare:

$$\|X\|, \quad \|-X\|, \quad \|O\|, \quad \|Y\|, \quad X \cdot Y, \quad (X + Y) \cdot Y, \quad X \cdot O, \quad \pi_X(Y), \quad \pi_X(X),$$

dove $\pi_X(Y)$ indica la proiezione ortogonale di Y su X .

5. Determinare una coppia di vettori ortogonali A e B in $\mathbf{R}^2$ e verificare che $\|A - B\| = \|A + B\|$. Determinare una coppia di vettori *non* ortogonali C e D in $\mathbf{R}^2$ e verificare che $\|C - D\| \neq \|C + D\|$. Fare un disegno delle due “situazioni”. Dimostrare che dati due vettori X e Y in $\mathbf{R}^2$, si ha che $\|X - Y\| = \|X + Y\|$ se e solo se $X \cdot Y = 0$.