1. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$.
   (i) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \overline{w}$, $|z + 3w|^2$. Dare la risposta nella forma $a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.
   (ii) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di zw, z^{-1} e $\overline{w}^2$.
   (iii) Calcolare $\mathrm{Arg}(z)$, $\mathrm{Arg}(zw)$, $\mathrm{Arg}(z/\overline{z})$ ed $\mathrm{Arg}(z^2)$.

2. Siano dati i numeri complessi $z = \cos\theta + i \sin\theta$ e $w = 3(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.
   (a) Calcolare modulo e argomento dei numeri complessi
$$\bar{z}, \quad z^{-1}, \quad 2w, \quad zw, \quad z^2, \quad w^3.$$
   (b) Sia $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Calcolare $|a|$, $\mathrm{Arg}(a)$, a^2, a^3, a^{100}.

3. Disegnare i seguenti insiemi di numeri complessi
   (i) $z = -\overline{z}$,
   (ii) $\mathrm{Arg}(z) = 0$,
   (iii) $|z| = 2$,
   (iv) $|z| = \overline{z}$,
   (v) $1 < |z| < 3$,
   (vi) $1 < |z - 2i| < 2$
   (vii) $Re((1 - i)\overline{z}) \geq -1$.

4. Siano $V \subset \mathbf{C}^3$ il piano di equazione cartesiana $z_1 + iz_2 = 2$ e sia $W \subset \mathbf{C}^3$ il piano di equazione cartesiana $z_2 - iz_2 = -1$. Determinare un'equazione parametrica per la retta complessa $V \cap W$.

5. Dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathbf{R}$:
$$\cos(5\varphi) = \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\mathrm{sen}^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\mathrm{sen}^4(\varphi),$$
$$\mathrm{sen}(5\varphi) = 5\cos^4(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}^3(\varphi) + \mathrm{sen}^5(\varphi).$$

6.(a) Verificare che l'applicazione $\mathbf{C} \to \mathbf{R}^2,\ z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.
   (b) Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che corrisponde all'applicazione $\mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto az$, data dalla moltiplicazione di un numero complesso z per il numero complesso $a = \alpha + i\beta$.

7. Per ogni matrice determinare gli autovalori dell'applicazione lineare corrispondente. Determinare gli autospazi.
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

8. Sia $S_\theta\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la riflessione rispetto ad una retta per l'origine che forma un angolo $\theta/2$ con l'asse delle ascisse positive. Determinare autovalori e autospazi di S_θ.

9. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcolare delle equazioni cartesiane per $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
(c) Per ogni autovalore di f, determinare l'autospazio corrispondente.

10. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile A.
   (a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
   (b) Dimostrare che se λ è autovalore di A, allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

11.(a) Sia $T_P\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la traslazione di passo P. Mostrare che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|T_A(\mathbf{v}) - T_A(\mathbf{w})\|$, per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$.
   (b) Sia $R_\theta\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la rotazione di un angolo θ, in senso antiorario, intorno all'origine. Mostrare che $\|R_\theta \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$.
   (c) Sia $S_\theta\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la riflessione rispetto ad una retta per l'origine che forma un angolo $\theta/2$ con l'asse delle ascisse positive. Mostrare che $\|S_\theta \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$.