1. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
   (b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
   (c) Calcolare $\det(A+B)$.

2. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   (b) Calcolare la matrice rappresentativa di g rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ in dominio e codominio.

3. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   vettori in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$:
$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$
   (b) Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (in dominio e codominio).
   (c) Calcolare la matrice rappresentative di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
   (d) Calcolare la matrice rappresentativa di f^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

4. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}.$$
   (a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è una base di $\mathbf{R}^3$ e che f è lineare.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
   (c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

5. (a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.
   Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
   (c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

6. Sia $T_A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la traslazione di passo $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare

$$T_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad T_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad T_A \circ T_A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), \quad T_{-A} \circ T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare l'immagine della retta di equazione $x-2y = 3$ tramite la traslazione $T_{\mathbf{p}}$, di passo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. Scrivere le formule della rotazione di un angolo $\theta = \pi/3$, in senso antiorario, intorno al punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare i punti fissi di f, ossia $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$.
   (b) Dare un'interpretazione geometrica di f.

10. Scrivere la matrice che rappresenta la riflessione rispetto alla retta di equazione $2x - y = 0$.

11. Determinare l'immagine della retta $x - 2y = 1$ tramite la riflessione del piano rispetto alla retta di equazione $x - y = 1$.