1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}$; (d) $\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $(\varphi \in \mathbf{R})$.

3. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare i prodotti vettoriali $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$.

4. Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un generico vettore in $\mathbf{R}^3$ e sia $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Scrivere le formule del prodotto vettoriale $\mathbf{x} \times \mathbf{a}$.
   (b) Mostrare che l'applicazione $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ è lineare.
   (c) Determinare nucleo e immagine di f.

5. Determinare la distanza delle rette

$$r: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}.$$

6. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$ e sia $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4 \}$.
   (a) Osservare che $W \subset V$ (!) e determinare la dimensione di W.
   (b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.
   (c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.

7. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

   (a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
   (b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
   (c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.