1. Dato il piano di equazione cartesiana $\pi: \ x_1 - x_2 + x_3 = 1$, determinare due rette parallele e due rette perpendicolari contenute nel piano π.

2. Dato il piano di equazione cartesiana $\pi: \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$, determinare la distanza di π dall'origine.

3. Siano date le rette di $\mathbf{R}^3$
$$r: \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad s: \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$
   (a) Determinare la loro posizione reciproca (coincidenti, parallele, sghembe?).
   (b) Calcolare la distanza $d(r, s)$.

4. Dato il piano di equazione cartesiana $\pi: \ x_1 - x_2 = 1$, determinare tutte le rette parallele a π e passanti per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Sia $g: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -2x-2y \\ x+y \end{pmatrix}$. Scrivere g come prodotto matrice per vettore. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\mathrm{im}(g)$.

6. Sia $f: \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$
   Scrivere f come prodotto matrice per vettore. Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\mathrm{im}(f)$.

7. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva fra spazi vettoriali e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vettori linearmente indipendenti in V.
   (a) Mostrare che $L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_k)$ sono linearmente indipendenti in W.
   (b) Esibire un esempio di applicazione lineare dove questo non vale.

8. Siano $n, m \geq 1$ e
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}.$$
   (a) Dimostrare che il sistema di equazioni lineari
$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{n1}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}x_1 & + & \ldots & + & a_{nm}x_n & = & b_m \end{cases}$$

ammette una soluzione se e solo se $\mathbf{b}$ è contenuto nello span delle colonne di A.

(b) (Rouché-Capelli) Dimostrare che il sistema di equazioni ammette una soluzione se e solo se il rango di A' è uguale al rango di A.

9. Siano $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ e $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ date da

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

10. Sia $\mathbf{R}[X]$ l'insieme dei polinomi nella variabile X.
   (a) Verificare che $\mathbf{R}[X]$ con la solita somma e la solita moltiplicazione per i numeri reali, è uno spazio vettoriale.
   (b) Dimostrare che la dimensione di $\mathbf{R}[X]$ è infinita.
   Sia $h : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ data da $h(p) = \frac{dp}{dX}$ per $p \in \mathbf{R}[X]$.
   (c) Calcolare $h(X^n)$ per ogni $n \geq 0$.
   (d) Dimostrare che h è un'applicazione lineare e determinare $\ker(h)$ e $\mathrm{im}(h)$.