1. Costruire insiemi di 1, 2, 3, 4 vettori linearmente dipendenti in $\mathbf{R}^2$;
   Costruire insiemi di 1, 2, 3, 4, vettori linearmente dipendenti in $\mathbf{R}^3$.

2. Dimostrare che due vettori ortogonali in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.

3. Calcolare la distanza del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dalla retta di equazione $3x_1 + x_2 = 3$.

4. Calcolare la distanza fra il punto P e la retta r, dove
$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s,\ t \in \mathbf{R}.$$

5. Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi W:
   (a) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$; (b) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;
   (c) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. (d) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$.

6. Sia $V = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$, e siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formano una base di V.
   (b) Sia $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Verificare che $\mathbf{w} \in V$ e determinare le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
   In altre parole, trovare $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{w} = \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2$.
   (c) Esibire un terzo vettore in $\mathbf{R}^3$ in modo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formino una base di $\mathbf{R}^3$.

7. Sia $W \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato da dato da
$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}\}.$$
   Esibire un secondo sottospazio $W' \subset \mathbf{R}^4$, tale che $W \cap W' = \{0\}$ e $W + W' = \mathbf{R}^4$.

8. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da
$$V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0\}.$$
   (a) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
   (b) Calcolare le dimensioni di V, W e $V \cap W$.
   (c) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.

9. Siano dati i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:
$$U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y = 0\right\}.$$

(a) Determinare una base per $U+V$ e una base per $U \cap V$;

(b) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.

10. Siano $V = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 0\}$ sottospazi di $\mathbf{R}^3$.
    (a) Esibire una base di V e una base di W. Calcolare la dimensione di V e di W.
    (b) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V+W)$.

11. Sia V uno spazio vettoriale e siano W e W' sottospazi di V. Dimostrare che $W \cup W'$ è un sottospazio di V se e solo se $W \subset W'$ oppure $W' \subset W$.

12. Calcolare, quando è possibile, i seguenti prodotti di matrici

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D, \quad D \cdot C \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Quali applicazioni sono lineari?
    (a) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $g(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
    (b) $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}.$$