1. Siano dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$.
   (a) Calcolare:
   $$\|A\|, \quad \|-B\|, \quad \|B\|, \quad \|C\|, \quad A \cdot C, \quad (A+B) \cdot B, \quad A \cdot B, \quad \pi_A(B), \quad \pi_B(A).$$
   (b) Calcolare l'area del triangolo di vertici O, A e B.
   (c) Calcolare l'area del parallelogramma di spigoli A e C

2. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot X_0 = 0\}$.

3. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $C = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \|X - X_0\| = 2\}$.

4. Siano dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare se $D \in \operatorname{span}\{A, B\}$.
   (b) Determinare se $\operatorname{span}\{A, B\} = \operatorname{span}\{C, D\}$.

5. Siano dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Dimostrare che $A,\ B,\ C$ sono una base di $\mathbf{R}^3$.
   (b) Scrivere D come combinazione lineare di $A,\ B,\ C$. In quanti modi si puo' fare?

6. Siano dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare la dimensione di $\operatorname{span}\{A, B, C, D, E\}$.
   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{span}\{A, B, C, D\}$.
   (c) Determinare la dimensione di $\operatorname{span}\{A, B, C, E\}$.

7. Siano $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{z},\ \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V. Determinare la dimensione del sottospazio $\operatorname{span}\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{u}-\mathbf{z}, 2\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$.

8. Sia $\mathbf{R}_2[X] = \{p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbf{R}\}$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3.
   (a) Sia $S = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(0) = 0\} \subset \mathbf{R}_2[X]$. Determinare se S è o meno un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$.
   (b) Sia $T = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(1) = 1\} \subset \mathbf{R}_2[X]$. Determinare se T è o meno un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}_2[x]$.

9. Siano $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$ e $V = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$.
   Calcolare le dimensioni di U, V, $U+V$ e $U \cap V$.