1. Quali V sono spazi vettoriali?
   (a) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R},$$

   (b) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione "$\oplus$" e moltiplicazione "$\otimes$" definite da

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy; \qquad && \text{per ogni } x, y \in V, \\ \lambda \otimes x &= x^{\lambda}; \qquad && \text{per ogni } x \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari:
   (a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : 2x_1 = -x_2 + 1\} \subset \mathbf{R}^2$, (c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$,
   (b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 + x_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$, (d) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^2$.

3. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ due vettori. Dimostrare che il sottoinsieme $W = \{t\mathbf{v} + s\mathbf{w} : t, s \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di V.

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \right\}.$$

   Decidere se $W = \{\mathbf{0}\}$ o meno.

5. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \in V$ il vettore zero.
   (a) Dimostrare che $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (b) Siano $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che se $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\lambda = 0$.

6. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 + 2\} \qquad B = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq x_1 + 1\};$$

$$C = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 > 0\} \qquad D = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 < 0\};$$

   (ii) Dati $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X + Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

(iii) Decidere quali di questi sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ coincidono:

$$A = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbf{R}\}, \quad B = \{\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{R}\}, \quad C = \{-t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}\}$$

$$D = \{-t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}\}, \quad E = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbf{R}\},$$

$$F = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

(iv) Dati i vettori $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcolare:

$$\|A\|, \quad \|-B\|, \quad \|B\|, \quad \|C\|, \quad A \cdot C, \quad (A+B) \cdot B.$$

7. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori in uno spazio vettoriale V reale. Dimostrare che

$$\operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

8. Esibire basi per i sottospazi W:

(a) $W = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$; (b) $W = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;

(c) $W = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. (d) $W = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$.

9. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$;

(a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.

(b) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(c) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3'$ tale che $\mathbf{R}^3 \neq \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3'\}$.

10. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

(a) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\} \subset \mathbf{R}^5$;

(b) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_3 + 2x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4$;

(c) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\} \subset \mathbf{R}^3$;

11. (a) Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 10.

(b) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali W dell'Esercizio 10.