1. Sia A una matrice $n \times n$ che soddisfa $A^2 = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per A.
   (a) Determinare gli autovalori di f.
   (c) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (d) Dimostrare che $\dim \ker(f) \geq n/2$.
   (e) Dare un esempio di una matrice $A \neq 0$, per cui vale $A^2 = 0$.

2. "Diagonalizzare" le seguenti forme quadratiche. In altre parole, trovare una matrice ortogonale U tale che il cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

   porti la forma quadratica nella forma $\lambda_1 {X'}^2 + \lambda_2 {Y'}^2$.
   (a) $X^2 + YX$;
   (b) X^2;
   (c) XY.

3. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica;
   (a) $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$;
   (b) $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$;
   (c) $X^2 + Y^2 + Z^2 + 4(XY + XZ - YZ)$;
   (d) $X(3Y + 4Z)$.

4. Siano A e B due matrici $n \times n$ con coefficienti reali. Dimostrare che

$$\mathrm{rango}(A) + \mathrm{rango}(B) \geq \mathrm{rango}(A + B).$$

   Dare un esempio per cui vale l'uguaglianza ed un esempio per cui vale la disuguaglianza stretta.