1. Determinare quali delle seguenti matrici sono hermitiane o unitarie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che la seguente matrice sia unitaria

$$\begin{pmatrix} a & i/2 & a(2i-1)/2 \\ ia & (1+i)/2 & a(1-i)/2 \\ a & -1/2 & a(2-i)/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sia M una matrice reale quadrata 3×3 antisimmetrica, cioè tale che ${}^tM = -M$. Dimostrare che ha un autovalore nullo.

4. Siano $a, b, d \in \mathbf{R}$ e sia A la matrice simmetrica data da $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e verificare che i suoi zeri sono in $\mathbf{R}$.
   (b) Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ di autovettori di A.

5. Sia B la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ di autovettori dell'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ data da $f(\mathbf{x}) = B\,\mathbf{x}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. Esibire una matrice ortogonale C con la proprietà che CBC^{-1} sia diagonale.

6. Sia D la matrice Hermitiana

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ di autovettori dell'applicazione $g : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ data da $g(\mathbf{x}) = D\,\mathbf{x}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^3$. Esibire una matrice unitaria U con la proprietà che UDU^{-1} sia diagonale.

7. Sia E la matrice

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}.$$

Verificare che E è unitaria. Esibire una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ di autovettori dell'applicazione $h : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ data da $h(\mathbf{x}) = E\,\mathbf{x}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^3$. Esibire una matrice unitaria U con la proprietà che UEU^{-1} sia diagonale.

8. Sia F la matrice

$$H = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Verificare che H è ortogonale. Dimostrare che $\lambda = 1$ è autovalore e determinare l'autospazio corrispondente. Determinare il polinomio caratteristico di H. (Sugg: invece di fare un calcolo "diretto", sfruttare il fatto che H è ortogonale).

9. Sia $F\colon S(n, n, \mathbf{R}) \times S(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $F(A, B) = Traccia(AB)$, dove $S(n, n, \mathbf{R})$ indica le matrici simmetriche a coefficienti reali. Mostrare che F definisce un prodotto scalare su $S(n, n, R)$.