1. Per ogni matrice determinare gli autovalori dell'applicazione lineare corrispondente. Determinare gli autospazi.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare delle equazioni cartesiane per $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$.
 (b) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
 (c) Per ogni autovalore di f , determinare l'autospazio corrispondente.
3. Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una matrice invertibile A .
 (a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
 (b) Dimostrare che se λ è autovalore di A , allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1} .
4. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ un vettore non nullo e sia $\pi_{\mathbf{v}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la proiezione ortogonale su $\mathbf{v}$. Determinare se esiste o meno una base di $\mathbf{R}^2$ composta da autovettori di $\pi_{\mathbf{v}}$. Se esiste, determinarne una.
5. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ un vettore non nullo, sia $r : X = t\mathbf{v}$, $t \in \mathbf{R}$ e sia $S : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta r . Determinare se esiste o meno una base di $\mathbf{R}^2$ composta da autovettori di S . Se esiste, determinarne una.
6. Sia A una matrice $n \times n$ che soddisfa $A^2 = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per A .
 (a) Determinare gli autovalori di f .
 (c) Dimostrare che $\text{im}(f) \subset \ker(f)$.
 (d) Dimostrare che $\dim \ker(f) \geq n/2$.
 (e) Dare un esempio di una matrice $A \neq 0$, per cui vale $A^2 = 0$.
7. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 (a) Calcolare $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$.
 (b) Calcolare autovalori e autospazi di f .