

1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

$$(a) \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcolare

$$(a) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}; \quad (d) \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\varphi \in \mathbf{R}).$$

3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare  $\det(A)$  e  $\det(B)$ .  
 (b) Calcolare  $\det(AB)$ ,  $\det(BA)$  e  $\det(A^{-1})$ .  
 (c) Calcolare  $\det(A+B)$ .

4. Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

- (a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .  
 (b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $2\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .  
 (c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .

5. Siano  $z = 2 + 2i$  e  $w = 2i$ .

- (i) Calcolare  $(z - w)^2$ ,  $2z^2 + 1/w$ ,  $z^{-1} + \bar{w}$ ,  $|z + 3w|^2$ . Dare la risposta nella forma  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ .  
 (ii) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di  $zw$ ,  $z^{-1}$  e  $\bar{w}^2$ .  
 (iii) Calcolare  $\text{Arg}(z)$ ,  $\text{Arg}(zw)$ ,  $\text{Arg}(z/\bar{z})$  ed  $\text{Arg}(z^2)$ .

6. Siano dati i numeri complessi  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  e  $w = 3(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

- (a) Calcolare modulo e argomento dei numeri complessi

$$\bar{z}, \quad z^{-1}, \quad 2w, \quad zw, \quad z^2, \quad w^3.$$

(b) Sia  $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Calcolare  $|a|$ ,  $\text{Arg}(a)$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^{100}$ .

8. Disegnare i seguenti insiemi di numeri complessi

- (i)  $z = -\bar{z}$ ,
- (ii)  $\text{Arg}(z) = 0$ ,
- (iii)  $|z| = 2$ ,
- (iv)  $|z| = \bar{z}$ ,
- (v)  $1 < |z| < 3$ ,
- (vi)  $1 < |z - 2i| < 2$
- (vii)  $\text{Re}((1 - i)\bar{z}) \geq -1$ .

9. Dimostrare che per ogni  $\varphi \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned}\cos(5\varphi) &= \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\sin^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\sin^4(\varphi), \\ \sin(5\varphi) &= 5\cos^4(\varphi)\sin(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\sin^3(\varphi) + \sin^5(\varphi).\end{aligned}$$

10. (*Disuguaglianza triangolare*) Dimostrare: per ogni  $z, w \in \mathbf{C}$  si ha

- (i)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ ,
- (ii)  $|z - w| \geq |z| - |w|$ ,
- (iii)  $|z - w| \geq |w| - |z|$ .

- 11.(a) Verificare che l'applicazione  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali su  $\mathbf{R}$ .
- (b) Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  che corrisponde all'applicazione  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $z \mapsto az$ , data dalla moltiplicazione di un numero complesso  $z$  per il numero complesso  $a = \alpha + i\beta$ .