

1. Siano V e W gli spazi vettoriali dati da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}, \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

- (a) Determinare se $f(V) \subset W$.
(b) Determinare se $f(V) \cap W$.

2. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F(X) = \mathbf{v} \times X$, dove $\times$ indica il prodotto vettoriale. Scrivere la matrice rappresentativa di F .

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sia $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la proiezione ortogonale su $\mathbf{v}$.
(a) Scrivere la matrice rappresentativa di F .
(b) Determinare nucleo e immagine di F .

4. Sia D la matrice 10×10

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & \cdots & 89 & 90 \\ 91 & 92 & \cdots & 99 & 100 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare il determinante di D .
(b) Calcolare il rango di D .

5. Sia $f : \mathbf{R}^{10} \longrightarrow \mathbf{R}^{10}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice D dell'esercizio 5.
(a) Determinare una base per l'immagine di f .
(b) Determinare una base per il nucleo di f .

6. Sia $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ data da $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ y + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$.

- (a) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base canonica in dominio e codominio.

(b) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base canonica nel dominio e la base

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nel codominio.}$$

(b) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in dominio e codominio.}$$

7. Siano V e W gli spazi vettoriali dati da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}, \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}.$$

$$\text{Siano } \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è una base di V e che $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ è una base di W .

Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare di matrice rappresentativa (rispetto alle basi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ uguale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcolare $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la matrice rappresentativa dell'applicazione φ rispetto alla base

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ di } V \text{ e la base } \mathbf{f}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{f}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$