1. Sia $L: V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva fra spazi vettoriali e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vettori linearmente indipendenti in V.
   (a) Mostrare che $L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_k)$ sono linearmente indipendenti in W.
   (b) Esibire un esempio di applicazione lineare dove questo non vale.

2. Sia A la matrice $n \times n$ data da
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data dalla moltiplicazione per A. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che $f(\mathbf{e}_1) = 0$ e che
$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \qquad \text{per } i = 2, 3, \ldots, n.$$
   (b) Per $m > 0$, sia f^m l'applicazione $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ volte}}$ e sia $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ volte}}$. Per ogni $m > 0$, calcolare la matrice A^m e determinare il nucleo e l'immagine di f^m.

3. Siano $n, m \geq 1$ e
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}.$$
   (a) Dimostrare che il sistema di equazioni lineari
$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{n1}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}x_1 & + & \ldots & + & a_{nm}x_n & = & b_m \end{cases}$$
   ammette una soluzione se e solo se $\mathbf{b}$ è contenuto nello span delle colonne di A.
   (b) (Rouché-Capelli) Dimostrare che il sistema di equazioni ammette una soluzione se e solo se il rango di A' è uguale al rango di A.

4. Sia $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.
   (a) Determinare la dimensione di W.
   (b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.
   (c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.

5. Sia $T_A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la traslazione di passo $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, data da
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare

$$T_A(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}), \quad T_A(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}), \quad T_A\circ T_A(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}), \quad T_{-A}\circ T_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

(b) Mostrare che per ogni $P=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$ ed $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$, vale

$$\|P-Q\| = \|T_A(P)-T_A(Q)\|.$$

6. Sia $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ l'applicazione data da

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ ed $f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$;

   (b) Concludere che f è una rotazione in senso antiorario di centro l'origine ed angolo θ.

7. Sia $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ l'applicazione data da

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ ed $f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$;

   (b) Concludere che f è una riflessione rispetto alla retta passante per l'origine, che forma con l'asse delle ascisse un angolo uguale a $\theta/2$.

8. Scrivere la matrice che rappresenta la riflessione rispetto alla retta di equazione $2x-y=0$.

9. Determinare l'immagine della retta di equazione $x-2y=3$ tramite la traslazione $T_{\mathbf{p}}$, di passo $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

10. Scrivere le formule della rotazione di un angolo $\theta=\pi/3$, in senso antiorario, intorno al punto $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

11. Sia $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$

    (a) Determinare i punti fissi di f, ossia $\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\}$.

    (b) Dare un'interpretazione geometrica di f.

12. Sia $R_\theta\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, la rotazione di un angolo θ, in senso antiorario, intorno all'origine.

    (a) Mostrare che $\|R_\theta\mathbf{v}\|=\|\mathbf{v}\|$, per ogni $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^2$.

13. Calcolare le formule della riflessione del piano rispetto alla retta di equazione $x-y=1$.