1. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V . Determinare la dimensione del sottospazio $\text{span}\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{z}, 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$.
2. Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi W :

(a) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^3;$ (b) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^3;$

(c) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^2.$ (d) $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^2.$

3. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0\right\}.$$

- (a) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
 - (b) Calcolare le dimensioni di V, W e $V \cap W$.
 - (c) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.
4. Siano dati i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y = 0\right\}.$$

- (a) Determinare una base per $U + V$ e una base per $U \cap V$;
 - (b) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.
5. Siano $V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ e $W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 0\right\}$ sottospazi di $\mathbf{R}^3$.
- (a) Esibire una base di V e una base di W . Calcolare la dimensione di V e di W .
 - (b) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

6. Sia V uno spazio vettoriale e siano W e W' sottospazi di V . Dimostrare che $W \cup W'$ è un sottospazio di V se e solo se $W \subset W'$ oppure $W' \subset W$.

7. Dato il piano di equazione cartesiana $\pi : x_1 - x_2 + x_3 = 1$, determinare due rette parallele e due rette perpendicolari contenute nel piano π .

8. Dato il piano di equazione cartesiana $\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$, determinare la distanza di π dall'origine.

9. Siano date le rette di $\mathbf{R}^3$

$$r : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

- (a) Determinare la loro posizione reciproca (coincidenti, parallele, sghembe?).
 - (b) Calcolare la distanza $d(r, s)$.
10. Dato il piano di equazione cartesiana $\pi : x_1 - x_2 = 1$, determinare tutte le rette parallele a π e passanti per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.