1. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori in uno spazio vettoriale V reale. Dimostrare che
$$\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

2. Esibire basi per i sottospazi W:
   (a) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$; (b) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;
   (c) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. (d) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$.

3. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$;
   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\mathbf{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
   (c) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3'$ tale che $\mathbf{R}^3 \neq \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3'\}$.

4. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.
   (a) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\} \subset \mathbf{R}^5$;
   (b) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_3 + 2x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4$;
   (c) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\} \subset \mathbf{R}^3$;

5. (a) Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 4.
   (b) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali W dell'Esercizio 4.

6. Dimostrare che due vettori ortogonali in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti e che tre vettori ortogonali in $\mathbf{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

7. Calcolare la distanza del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dalla retta di equazione $3x_1 + x_2 = 3$.

8. Calcolare la distanza fra il punto P e la retta r, dove
$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s,\ t \in \mathbf{R}.$$

9. Determinare se P appartiene al piano π, dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \pi : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

10. Determinare se la posizione della retta r rispetto al piano π dell'esercizio precedente (parallela, incidente o contenuta), dove

$$r : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

11. Scrivere il piano π dell'esercizio 9 in altri due modi (in modo che non sia evidente che si tratta dello stesso piano).