1. Quali V sono spazi vettoriali?
   (a) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R},$$

   (b) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione "$\oplus$" e moltiplicazione "$\otimes$" definite da

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy; \qquad && \text{per ogni } x, y \in V, \\ \lambda \otimes x &= x^{\lambda}; \qquad && \text{per ogni } x \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari:
   (a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = -x_2 + 1\} \subset \mathbf{R}^2$, (c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$,
   (b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$, (d) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$.

3. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ due vettori. Dimostrare che il sottoinsieme $W = \{t\mathbf{v} + s\mathbf{w} : t, s \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di V.

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \}.$$

   Decidere se $W = \{\mathbf{0}\}$ o meno.

5. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \in V$ il vettore zero.
   (a) Dimostrare che $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (b) Siano $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che se $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\lambda = 0$.

6. Dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$,
   (a) disegnare i vettori $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$, $A - B$, $A - 2B$, $A - 3B$;
   (b) disegnare tB, per $t \in [0, 1]$;
   (c) disegnare tC, per $t \in [-1, 0]$;
   (d) disegnare $A + tB$, per $t \in [0, 1]$;
   (e) disegnare $A + tB$, per $t \in \mathbf{R}$. Di che insieme si tratta?

7. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 + 2\} \qquad B = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq x_1 + 1\};$$

$$C = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 > 0\} \qquad D = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 < 0\};$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X+Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

(iii) Decidere quali di questi sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ coincidono:

$$A = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbf{R}\}, \quad B = \{\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{R}\}, \quad C = \{-t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}\}$$

$$D = \{-t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}\}, \quad E = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbf{R}\},$$

$$F = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

(iv) Dati i vettori A, B, C dell'esercizio 6, calcolare:

$$\|A\|, \quad \|-B\|, \quad \|B\|, \quad \|C\|, \quad A \cdot C, \quad (A+B) \cdot B, \quad A \cdot B, \quad \pi_A(B), \quad \pi_B(A).$$

8. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot X_0 = 0\}$.

9. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $C = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \|X - X_0\| = 2\}$.

10. Calcolare l'area del triangolo di vertici O, A e B e l'area del parallelogramma di spigoli A e C, dove i vettori A, B e C sono quelli dell'esercizio 6.