1. Determinare quali delle seguenti matrici sono hermitiane o unitarie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che la seguente matrice sia unitaria

$$\begin{pmatrix} a & i/2 & a(2i-1)/2 \\ ia & (1+i)/2 & a(1-i)/2 \\ a & -1/2 & a(2-i)/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sia M una matrice reale quadrata 3×3 antisimmetrica, cioè tale che ${}^tM = -M$. Dimostrare che ha un autovalore nullo.

4. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Scrivere la matrice rappresentativa di $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, data da $X \mapsto X \times \mathbf{v}$. Determinare gli autovalori di F e un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di prodotto scalare. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : V \longrightarrow V$ mediante $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in V$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia U un sottospazio di V. Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortogonale di U. Sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale e sia $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ una base ortogonale di $U^\perp$.
   (i) Far vedere che $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ è un insieme di vettori ortogonali.
   (ii) Far vedere che sono una base di V.

7. Dimostrare che se $\lambda \in \mathbf{R}$ è autovalore di una matrice quadrata reale A, è anche autovalore della matrice trasposta ${}^tA$.

8. Sia $F\colon S(n,n,\mathbf{R}) \times S(n,n,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $F(A,B) = Traccia(AB)$, dove $S(n,n,\mathbf{R})$ indica le matrici simmetriche a coefficienti reali. Mostrare che F definisce un prodotto scalare su $S(n,n,R)$.

9. Mostrare che una matrice A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica.

10. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica;
    (a) $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$;
    (b) $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$;