1. Delle seguenti matrici determinare gli autovalori in $\mathbf{R}$ e le loro molteplicità algebrica e geometrica. Dire se sono diagonalizzabili o meno.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Siano $a, b, d \in \mathbf{R}$ e sia A la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e verificare che i suoi zeri sono in $\mathbf{R}$.
 (b) Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ di autovettori di A .

3. Sia $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un'applicazione lineare. Supponiamo che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori di F di autovalori $0, 1, -1$, rispettivamente. Determinare la matrice rappresentativa di F nella base canonica.

4. Sia B la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di autovettori di B . Diagonalizzare B .

5. Esibire due matrici con gli stessi autovalori, una diagonalizzabile e una no.

6. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano W . È diagonalizzabile? Calcolare la traccia di f .

7. Determinare il polinomio caratteristico della tavola pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}.$$

8. Siano dati i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e sia $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.

- (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
- (iii) Calcolare le coordinate del vettore X nella base ortonormale così ottenuta.

9. Ortonormalizzare i vettori $\left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbf{R}^4$. Determinare il complemento ortogonale del sottospazio $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ in $\mathbf{R}^4$ esibendone una base.

10. Controllare se i vettori $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

11. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ il cui primo vettore sia $P/\|P\|$. In quanti modi si può fare?

12. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.

- (a) Determinare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^4$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$.
- (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.
- (c) Esibire due elementi di A che siano ortogonali fra loro. Posso trovarne tre? quattro?

13. Sia dato il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determinare la distanza di P da W .
- (b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$.
- (c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.