

1. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
 - (a) $p \rightarrow (\neg q \vee r)$; (b) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$; (c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$;
 - (d) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$; (e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$; (f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$;
 - (g) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$; (h) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$.
2. Verificare le seguenti equivalenze logiche fra forme proposizionali.
 - (a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, $(p \wedge q) \vee \neg q \Leftrightarrow p \vee \neg q$, $(p \vee q) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ (leggi di assorbimento);
 - (b) $\neg(p \oplus q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$;
 - (c) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow q$.
3. Determinare quali tra le seguenti forme proposizionali sono tautologie e quali sono contraddizioni.
 - (a) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$; (b) $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$; (c) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$;
 - (d) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$; (e) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p))$
4. Stabilire se le seguenti forme proposizionali $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ sono equivalenti.
5. Dimostrare che se p e $p \rightarrow q$ sono tautologie allora q è una tautologia.
6. Scrivere tutti i connettivi logici fra due proposizioni come combinazione di \neg , \vee e \wedge .
7. Scrivere forme normali disgiuntive logicamente equivalenti alle seguenti forme proposizionali
 - (a) $(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$; (b) $\neg(p \vee r) \vee (p \rightarrow q)$; (c) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \vee p)$;
 - (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$; (e) $\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)$.
8. Si ricordi che la *Freccia di Peirce* $p \downarrow q$ è logicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$.
 - (a) mostrare che $p \downarrow p \Leftrightarrow \neg p$;
 - (b) mostrare che $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$;
 - (c) concludere che $\{\downarrow\}$ è un sistema completo di connettivi logici;
 - (d) trovare una forma proposizionale solo in \downarrow logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$
9. Riscrivere ciascuna delle seguenti proposizioni in modo tale che le negazioni siano poste solo davanti ai predicati (cioè non ci devono essere negazioni davanti a un quantificatore o davanti a un'espressione che comprenda connettivi logici)
 - (a) $\neg \exists y \exists x P(x, y)$; (b) $\neg \forall x \exists y P(x, y)$; (c) $\neg \exists y (Q(y) \wedge \forall x \neg R(x, y))$;
 - (d) $\neg \exists y (\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$; (e) $\neg \exists y (\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z U(x, y, z))$;
 - (f) $\neg (\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$; (g) $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z))$
10. (a) Sia $S \subset \mathbf{R}$. Usando i quantificatori, esprimere il fatto che $x = \sup(S)$;
- (b) Usando i quantificatori, esprimere che $y \neq \sup(S)$;
- (c) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste;
- (d) Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste;
- (e) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori esprimere il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$;
- (f) Usando i quantificatori esprimere il fatto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- (g) Esprimere il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge;
- (h) Sia $\sigma \in \mathbf{R}$. Usando i quantificatori, esprimere il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma$;
- (i) Usando i quantificatori esprimere il fatto che \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 sono vettori linearmente indipendenti.