

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Indichiamo con $\cap, \cup$ e $^-$ rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in $\mathcal{P}(X)$. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole.
2. Dato un numero naturale n , si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ sia prodotto di k primi *distinti*. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} := \frac{n}{a}$.
 - (a) Verificare che $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
 - (b) Sia $X = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione

$$f: \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \cdots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \dots, p_{i_\alpha}\}$$

è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre).

3. Dimostrare che le algebre di Boole $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cap, \cup, ^-)$ e $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \cap, \cup, ^-)$ non possono essere isomorfe.
4. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita.
 - (a) Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole numerabile.
5. Sia $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ l'algebra Booleana formata dalle terne $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ con le operazioni definite cifra per cifra da

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1, \quad 1 \otimes 1 = 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \quad \bar{0} = 1.$$

- (a) Qual è l'identità per $\oplus$?
- (b) Qual è l'identità per $\otimes$?
- (c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$(001 \otimes 001) \oplus 100 = \dots, (111 \oplus 001) \oplus 100 = \dots, (001 \otimes \bar{001}) \oplus \bar{101} \otimes 010 = \dots$$

6. Sia $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ un'algebra Booleana.
 - (a) Dimostrare che in un'algebra booleana valgono le Leggi di De Morgan:

$$\overline{(x \oplus y)} = \bar{x} \otimes \bar{y}, \quad \overline{x \otimes y} = \bar{x} \oplus \bar{y}.$$

7. Si consideri l'espressione booleana $E(x, y, z) = x \otimes (x \otimes \bar{y} \oplus \bar{x} \otimes y \oplus \bar{y} \otimes z)$.
 - (a) Esprimere $E(x, y, z)$ come somma di prodotti;
 - (b) Determinare un'espressione minimale di $E(x, y, z)$ come somma di prodotti.
8. Sia B un'algebra di Boole. Per $x, y \in B$ definiamo $x + y = x \otimes \bar{y} \oplus \bar{x} \otimes y$. Dimostrare le seguenti uguaglianze o darne un controesempio.

(a) $x + y = y + x$;	(c) $x + y = (x \oplus y) \otimes \overline{x \otimes y}$;	(e) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$;
(b) $x + x = 0$;	(d) $x + (y + z) = (x + y) + z$;	(f) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$.
9. Far vedere che il diagramma di Hasse 14–29 nel libro di Schaum è sbagliato.
10. In un'algebra di Boole (dove $x + y$ denota la somma di due elementi, xy il prodotto e x' il complemento), scrivere le seguenti espressioni come somma di prodotti completata:
 - (a) $x'y((zt)' + x')'$; (b) $(x + x'y + xy'z)(x'z)$; (c) $x + x'yz$.
11. Scrivere le seguenti espressioni in un'algebra di Boole come somma di implicant minimali:
 - (a) $xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'$; (b) $txyz' + tx'y'z + tx'yz' + t'xyz + t'xy'z + t'x'yz + t'x'y'z$.
12. Trovare espressioni *minimali* Booleane per:
 - (a) $x'y + x'y'$; (b) $xy + xy'$; (c) $xy + xy' + x'y + xy'$; (d) $xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'$.