1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$ e $\cup$ le operazioni di intersezione e di unione fra sottoinsiemi di X. Dimostrare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ è un reticolo.

2. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali con la relazione di ordine parziale data da $m \leq n$ *se* m *divide* n.
   (a) Dimostrare che per ogni coppia $m, n \in \mathbf{N}$ esistono $z, w \in \mathbf{N}$ tali che
   $$\begin{cases} z \leq m \\ z \leq n, \end{cases} \qquad \begin{cases} m \leq w \\ n \leq w. \end{cases}$$
   (b) Concludere che $\inf\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ e $\sup\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ sono operazioni binarie su $\mathbf{N}$, che coincidono rispettivamente col *massimo comun divisore* e il *minimo comune multiplo.*
   (c) Dimostrare che $(\mathbf{N}, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm})$ è un reticolo.

3. Stabilire quali dei seguenti insiemi parzialmente ordinati ($A \leq B$ se e solo se $A \subseteq B$) sono reticoli:
   (a) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, |A| \text{ dispari } \}$; (c) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, A \supseteq \{1,3\} \}$;
   (b) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, |A| \geq 2 \}$; (d) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \,:\, |A| \leq 1 \text{ oppure } |A| = 3\}$

4. Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo.
   (a) Si consideri la relazione "$\leq$" su L così definita: dati $a, b \in L$, $a \leq b$ se e solo se $a \wedge b = a$. Dimostrare che $\leq$ è un ordinamento parziale su L.
   (b) Si consideri la relazione "$\leq'$" su L così definita: dati $a, b \in L$, $a \leq' b$ se e solo se $a \vee b = b$. Dimostrare che $\leq'$ è un ordinamento parziale su L.
   (c) Dimostrare che gli ordinamenti parziali $\leq$ e $\leq'$ coincidono.
   (d) Dimostrare che, rispetto all'ordinamento parziale $\leq$, $sup(a, b) = a \vee b$ e $inf(a, b) = a \wedge b$ per ogni $a, b \in L$.

5. Dimostrare che nel reticolo $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ le relazioni di ordine parziale definite nell'Esercizio 4 coincidono con la relazione di contenenza $\subseteq$.

6. Dimostrare che nel reticolo $(\mathbf{N}, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm})$ e relazioni di ordine parziale definite nell'Esercizio 4 coincidono con la relazione mRn *se* m *divide* n.

7. Siano $(L, \vee, \wedge)$ e $(L', \vee', \wedge')$ due reticoli e siano $(L, \leq)$ e $(L', \leq')$ le corrispondenti relazioni di ordine parziale. Una funzione biettiva $f : L \to L'$ si dice un *isomorfismo di reticoli* se: $f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$ per ogni $x, y \in L$. In tal caso i due reticoli sono detti *isomorfi.*
   (a) Dimostrare che se $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli allora anche $f^{-1} : L' \to L$ lo è;
   (b) Dimostrare che una funzione biettiva $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli se vale la seguente condizione: dati $x, y \in L$, si ha che $x \leq y$ se e solo se $f(x) \leq' f(y)$.
   (c) Sia $X = \{1, 2\}$ e si consideri il reticolo $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$. Determinare quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$.

8. Dato un numero naturale n, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$, munito della relazione d'ordine parziale $m \leq k$ se e solo se m divide k. Stabilire se $\mathbf{D}_{30}$ e $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ sono reticoli isomorfi. e, in caso affermativo, stabilire quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

9. (a) Stabilire se i reticoli $\mathbf{D}_6$ e $\mathbf{D}_{15}$ sono isomorfi.
   (b) In caso affermativo eterminare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_6 \to \mathbf{D}_{15}$.

10. (a) Stabilire se i reticoli $\mathbf{D}_{30}$ e $\mathbf{D}_{105}$ sono isomorfi.

(b) In caso affermativo, determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \to \mathbf{D}_{105}$.

11. (a) Stabilire se i reticoli $\mathbf{D}_{12}$ e $\mathbf{D}_{18}$ sono isomorfi.
    (b) In caso affermativo, determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{12} \to \mathbf{D}_{18}$.

12. (a) Stabilire se i reticoli $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ e $\mathbf{D}_{24}$ sono isomorfi.
    (b) Stabilire se uno dei reticoli del punto (a) è isomorfo a $\mathbf{D}_{30}$.

13. Si consideri il reticolo $L = \{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) : A \subseteq \{1,2,3\}\}$ (con $A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$).
    (a) Dimostrare che L è limitato.
    (b) Stabilire se ci sono elementi il cui complemento non è unico.
    (c) Stabilire se L è un reticolo distributivo.

14. Quali dei seguenti reticoli sono reticoli con complemento?
    (a) $\mathbf{D}_{70}$,
    (b) $\mathbf{D}_{18}$,
    (c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

15. Stabilire se i seguenti reticoli sono reticoli distributivi, reticoli con complemento, reticoli con complemento unico:
    (a) $\{1,2,3,4,9,12,18,36\}$, munito delle operazioni $a \wedge b = mcd(a,b)$, $a \vee b = mcm(a,b)$,
    (b) $\mathbf{D}_{12}$,
    (c) $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$,
    (d) $\mathbf{D}_{30}$,
    (e) $\{1,6,10,15,30,60,90,180\}$, munito delle operazioni $a \wedge b = mcd(a,b)$.