1. Sia $\mathbf{Z}_8$ l'insieme delle classi resto modulo 8.
   (a) Scrivere la tabella dell'addizione e della moltiplicazione in $\mathbf{Z}_8$.
   (b) Determinare $\mathbf{Z}_8^*$, il sottoinsieme degli elementi invertibili rispetto alla moltiplicazione in $\mathbf{Z}_8$.
   (c) Scrivere la tabella della moltiplicazione in $\mathbf{Z}_8^*$.
   (d) Determinare le soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ dell'equazione $\overline{x}^2 \equiv \overline{0}$.
   (e) Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $4x \equiv 0 \pmod 8$ e le soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ dell'equazione $\overline{4}\overline{x} \equiv \overline{0}$.
   (f) Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $2x \equiv 6 \pmod 8$ e le soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ dell'equazione $\overline{2}\overline{x} \equiv \overline{6}$.
   (g) Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $3x \equiv 1 \pmod 8$. Quante soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ ha l'equazione $\overline{3}\overline{x} \equiv \overline{1}$?

2. Sia $n = 23$. Enunciare il Piccolo Teorema di Fermat per $G = \mathbf{Z}_{13}^*$. Usare tale risultato per calcolare
$$\overline{4^{24}},\quad \overline{4^{59}},\quad \overline{4^{26}},\quad \overline{4^{24001}} \quad \in \mathbf{Z}_{13}.$$

3. Siano $(G_1, e_1, \circ)$ e $(G_2, e_2, *)$ due gruppi. Sul prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$ definiamo una operazione mediante
$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1 \circ h_1, g_2 * h_2).$$
   (a) Dimostare che con questa operazione $G_1 \times G_2$ è un gruppo.
   (b) Siano $(G_1, e_1, \circ) = (G_2, e_2, *) = (\mathbf{Z}_2, \bar{0}, +)$, con la somma $\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}$. Scrivere la tabella dell'operazione indotta su $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.
   (c) Siano $(G_1, e_1, \circ) = (\mathbf{Z}_2, \bar{0}, +)$ e $(G_2, e_2,) = (\mathbf{Z}_3, \bar{0}, +)$. Scrivere la tabella dell'operazione indotta su $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$.

4. Sia G un gruppo tale che $g^2 = e$, per ogni $g \in G$. Dimostrare che G è abeliano.

5. Sia $G = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R},\ \det M \neq 0\}$. Dimostrare che G col prodotto fra matrici usuale è un gruppo non commutativo.

6. Sia $A = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$.
   (a) Dimostrare che A con la somma fra matrici usuale è un gruppo abeliano.
   (b) Dimostrare che A con la somma e il prodotto fra matrici usuali è un anello non commutativo.
   (c) Far vedere che esistono matrici non nulle $M, N \in A$ il cui prodotto è la matrice nulla.
   (d) Chi sono le unità in A?

7. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Definiamo su $P(X)$ una "somma" ed un "prodotto" mediante
$$A \oplus B := (A \cup B) - (A \cap B), \qquad A \otimes B := A \cap B.$$
   (a) Verificare che $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.
   (b) Dimostrare che $P(X)$ con l'operazione $\oplus$ è un gruppo abeliano.
   (c) Scrivere la tabella di composizione per un insieme X di due elementi. Confrontare con il gruppo di Klein V_4.
   (d) Dimostrare che $P(X)$ con le operazioni "$\oplus$" e "$\otimes$" è un anello commutativo.
   (d) Chi sono le unità in $P(X)$?