Elementi di Algebra e Logica 2009. Esercizi 1. Insiemi, funzioni, cardinalità, induzione, funzioni ricorsive.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{4n,\ n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4m+4,\ m \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{n^2,\ n \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{n^2,\ n \in \mathbf{N}\}$, dove $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.
   (a) Elencare alcuni elementi di A, B, C e D. Determinare se $16, 20 \in B$, se $16, 20 \in C$, se $-16 \in C$.
   (b) Esibire un elemento x tale che $x \in B$ e $x \notin D$.
   (c) Deteminare se alcuni di questi insiemi coincidono: in tal caso dimostrare che effettivamente il primo è contenuto nel secondo e il secondo nel primo.
   (d) Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $D \setminus A$.
   (e) Determinare $\mathbf{Z} \setminus A$.

2. Siano dati gli insiemi $A = \{7n^2,\ n \in \mathbf{Z},\ -5 \leq n \leq 5\}$, $B = \{m(m+1)/2,\ m \in \mathbf{Z},\ 1 \leq m \leq 5\}$, $C = \{7n^2,\ n \in \mathbf{Z},\ 0 \leq n \leq 5\}$
   (a) Elencare tutti gli elementi di A e B.
   (b) Determinare $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus C$.
   (c) Determinare se la funzione $f \colon \{n \in \mathbf{Z},\ -5 \leq n \leq 5\} \to A$, definita da $f(n) = 7n^2$ è iniettiva.
   (d) Determinare se la funzione $f \colon \{n \in \mathbf{Z},\ 0 \leq n \leq 5\} \to A$, definita da $f(n) = 7n^2$ è iniettiva.
   (e) Determinare se esiste un'applicazione iniettiva $f \colon A \to C$.

3. Siano dati gli insiemi $A = \{4n,\ n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{6m,\ m \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{5n,\ n \in \mathbf{Z}\}$.
   (a) Elencare alcuni elementi di A, B, C.
   (b) Determinare $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ ed elencare alcuni elementi in ognuno di essi.
   (c) Determinare $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ ed elencare alcuni elementi in ognuno di essi.

4. Siano dati gli insiemi $A = \{4n,\ n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{6m,\ m \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{5n,\ n \in \mathbf{Z}\}$.
   (a) Verificare che $f \colon \mathbf{Z} \to A$, definita da $f(n) = 4n$ è un'applicazione iniettiva. È anche suriettiva?
   (b) Determinare un'applicazione iniettiva $f \colon \mathbf{Z} \to B$.
   (c) Determinare se l'applicazione $f \colon \mathbf{Z} \to C$, definita da $f(n) = 5n + 25$ è iniettiva e se è suriettiva.

5. Siamo A e B insiemi finiti con n elementi.
   (a) Verificare che se f è iniettiva, allora è anche suriettiva.
   (b) Verificare che se f è suriettiva, allora è anche iniettiva.
   (c) Determinare un'applicazione $f \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ che sia iniettiva, ma non suriettiva.
   (c) Determinare un'applicazione $f \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ che sia suriettiva , ma non iniettiva.

6. Sia $1 < a < 1$.
   (a) Usando il principio di induzione, dimostrare che
   $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$
   (b) Dedurre da (a) che $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.
   (sugg. osservare che se $1 < a < 1$, allora $a^k \to 0$, per $k \to \infty$.)
   (c) Calcolare
   $$\sum_{k=0}^{5} a^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a^k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a^k,$$
   per $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{10}$ e per $a = \frac{1}{10^p}$, dove p è un numero naturale fissato.
   (d) Sia $x = 0, \overline{X_1 \ldots X_p}$ un numero reale la cui espansione decimale è periodica di periodo $\overline{X_1 \ldots X_p}$:
   $$x = X_1 \ldots X_p \left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \ldots\right).$$
   Sfruttando (c), scrivere x in forma di frazione.
   (e) Sia $x = Y_1 \ldots Y_m, Z_1 \ldots Z_n \overline{X_1 \ldots X_p}$ un numero reale la cui espansione decimale è periodica di periodo $\overline{X_1 \ldots X_p}$. Generalizzando (d), scrivere x in forma di frazione.
   (f) Scrivere $0, \overline{9}$ in forma di frazione.
   (g) Verificare che ogni numero razionale ha un'espansione decimale periodica della forma
   $$x = Y_1 \ldots Y_m, Z_1 \ldots Z_n \overline{X_1 \ldots X_p}.$$