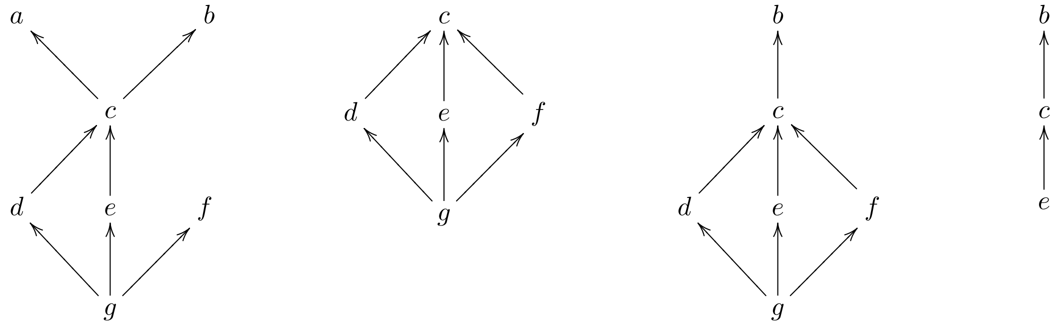
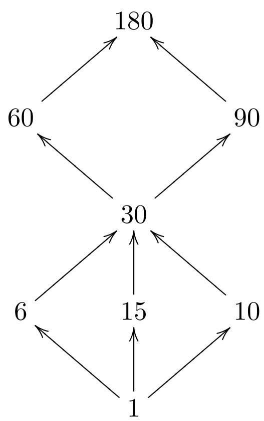
Algebra e Logica 2015. Esercizi 11. Reticoli.

1. Quali dei seguenti insiemi parzialmente ordinati sono reticoli e quali no (spiegare bene le risposte):



2. Sia $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $S = \{\{a, b\}, \{b\}, \emptyset, \{c, d\}, X\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di contenenza $\subset$. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se S è un reticolo.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 63\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se X è un reticolo.
4. Si consideri il reticolo $L = \{1, 6, 10, 15, 30, 60, 90, 180\}$ con la relazione di ordine data dalla divisibilità, e munito delle operazioni di inf e sup indotte da tale relazione, per semplicità indicate con $a \wedge b = inf(a, b)$ e $a \vee b = sup(a, b)$.



Il reticolo L.

   (a) Calcolare
   $$60 \wedge 90 \wedge 15, \qquad 60 \wedge (90 \vee 15), \qquad 6 \vee (15 \wedge 30), \qquad (6 \wedge 15) \bigvee (10 \wedge 60).$$
   (b) Verificare che si tratta di un reticolo limitato, specificando chi sono massimo e minimo.
   (c) Determinare se è un reticolo complementato, specificando quali elementi hanno complemento, se tale complemento è unico, ed eventualmente quali elementi non hanno complemento.
   (d) Determinare, se ci sono, terne di elementi $a, b, c \in L$ e $l, m, n \in L$ per cui
   $$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad l \wedge (m \vee n) \neq (l \wedge m) \vee (l \wedge n).$$
   (e) Sia $S = \{10, 15, 30, 60\} \subset L$. Determinare l'insieme dei maggioranti di S in L e determinare se S ha sup in L. Se si', determinare se si tratta di un massimo.
   (f) Determinare l'insieme dei minoranti di S in L e determinare se S ha inf in L. Se si', determinare se si tratta di un minimo.
5. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.
   (a) Dimostrare che le operazioni di reticolo hanno la proprietà dell'assorbimento.
   (b) Dimostrare che per le operazioni di reticolo vale l'idempotenza.
   (c) Dimostrare che le operazioni di reticolo sono distributive.