1. Sia data l'equazione alle differenze finite $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + n$.
   (a) Determinare se $\alpha_n = 2(-1)^n + 1$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.
   (b) Determinare se $\alpha_n = 2(-1)^n + n$ è soluzione dell'equazione data.

2. Sia data l'equazione omogenea alle differenze finite $a_n = ca_{n-1}$, con $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
   (a) Verificare che $\alpha_n = c^n$ è soluzione dell'equazione e che $S_n = A\alpha_n$ è soluzione, per ogni $A \in \mathbf{R}$.

3. Sia data l'equazione omogenea alle differenze finite $a_n = 7a_{n-1}$.
   (a) Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $a_0 = 2$ e quella che soddisfa la condizione iniziale $a_0 = 7$.

4. Sia data un'equazione omogenea alle differenze finite $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, e supponiamo che α_n e β_n siano soluzioni.
   (a) Verificare che per ogni A, B scalari, $S_n = A\alpha_n + B\beta_n$ è soluzione.

5. Sia data un'equazione omogenea alle differenze finite $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, e sia $p(\lambda) = \lambda^2 - c_1\lambda - c_2$ il polinomio associato.
   (a) Sia r una radice reale di $p(\lambda)$. Verificare che $\alpha_n = r^n$ è soluzione dell'equazione.
   (b) Sia r una radice reale di $p(\lambda)$ di molteplicità algebrica 2. Verificare che $\beta_n = nr^n$ è soluzione dell'equazione.

6. Sia data l'equazione $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 2$.
   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $a_0 = 2,\ a_1 = 7$.
   (b) Determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $a_0 = 1,\ a_1 = 0$.

7. Sia data l'equazione $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$.
   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $a_0 = 1,\ a_1 = -1$.
   (b) Determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 2$.

8. Sia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ un'equazione alle differenze finite, lineare omogenea a coefficienti costanti il cui polinomio caratteristico ha radici complesse coniugate $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ (in questo caso $y \neq 0$).
   (a) Verificare che per ogni $A, B \in \mathbf{C}$, la successione $S_n = Az^n + B\bar{z}^n$ (possibilmente complessa) è soluzione dell'equazione.
   (b) Verificare che se i valori iniziali della successione a_0 e a_1 sono reali, allora $B = \overline{A}$ e precisamente $A = \alpha + i\beta$, con $\alpha = \frac{a_0}{2}$ e $\beta = \frac{a_0 x - a_1}{2y}$. In particolare, la soluzione cercata è reale

$$S_n = 2\mathrm{Re}(Az^n) = a_0 |z|^n \cos(n\theta) + \frac{a_1 - a_0 x}{y} |z|^n \sin(n\theta).$$

   (Qui $\theta = arg(z)$).

9. Determinare la soluzione dell'equazione $a_n = -4a_{n-2}$, con condizioni iniziali $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.

N.B. Sia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

un'equazione alle differenze finite non omogenea.
Se $F(n) = s^n(b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_t n^t)$, con $s,\ b_i \in \mathbf{R}$ dati, allora la soluzione particolare si cerca della forma:

- $s^n(p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + \ldots + p_t n^t)$, con $p_i \in \mathbf{R}$ da determinare, se s non è radice del polinomio caratteristico;
- $n^m s^n(p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + \ldots + p_t n^t)$, con $p_i \in \mathbf{R}$ da determinare, se s è radice del polinomio caratteristico di molteplicità m.

10. Data l'equazione $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + F(n)$, determinare le radici del polinomio associato e scrivere la "forma generale" (non è necessario portare a termine i calcoli) di una soluzione particolare dell'equazione quando

$$F(n) = n^2, \quad F(n) = (-2)^n, \quad F(n) = n^2 2^n, \quad F(n) = 3, \quad F(n) = n^2(-2)^n.$$

11. Per ognuna delle successioni seguenti $\{F(n)\}$, determinare un'equazione alle differenze finite, lineare omogenea a coefficienti costanti E di cui $F(n) =$ è soluzione:

$$F(n) = n^2 + 3^n, \quad F(n) = (-2)^n + 1, \quad F(n) = n^2 2^n, \quad F(n) = 2^n + 3^n, \quad F(n) = n^2(-2)^n + (-1)^n.$$

12. Data l'equazione $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + F(n)$, scrivere la "forma generale" (non è necessario portare a termine i calcoli) di una soluzione particolare per

$$F(n) = n^2 + 3^n, \quad F(n) = (-2)^n + 1, \quad F(n) = n^2 2^n, \quad F(n) = 2^n + 3^n, \quad F(n) = n^2(-2)^n + (-1)^n.$$

N.B.: Ricordiamo che se $F(n)$ soddisfa a sua volta una equazione alle differenze finite, lineare omogenea a coefficienti costanti E, allora si cerca una soluzione particolare dell'equazione originaria fra le soluzioni di E, ossia a partire dalla soluzione generale di E.

13. Trovare la soluzione dell'equazione $a_n = -a_{n-2} + 2^n$, con condizioni iniziali $a_0 = 2$ e $a_1 = 2$.
14. Trovare una relazione di ricorrenza per il determinante di A_n, matrice $n \times n$ che ha tutti 2 sulla diagonale principale, tutti 1 sulle diagonali sopra e sotto la diagonale principale, tutti zeri altrove: per esempio per $n = 3$ ed $n = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Trovare una relazione di ricorrenza per il determinante di A_n, matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla diagonale che va dall'alto a destra a sinistra in basso e tutti zeri altrove: per esempio per $n = 2$ ed $n = 3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    L'equazione ottenuta è lineare a coefficienti costanti?

16. Una coppia di conigli produce due coppie di conigli dopo un mese e 6 coppie di conigli al mese, a partire dal secondo mese.
    (a) Scrivere la relazione di ricorrenza soddisfatta dal numero di coppie di conigli al "mese n".
    (b) Determinare il numero di coppie di conigli al "mese n" se si parte da una coppia, ossia $a_0 = 1$.
    (c) Dopo quanti mesi si raggiungono i cento conigli?
17. Un impiegato prende uno stipendio iniziale di 50.000 dollari all'anno. Alla fine di ogni anno il suo stipendio raddoppia ed ha inoltre un incremento di 10.000 dollari per ogni anno lavorato in precedenza.
    (a) Scrivere la relazione di ricorrenza per lo stipendio all'anno n.
    (b) Determinare lo stipendio all'inizio dell'undicesimo anno.