Alcuni di questi esercizi sono stati fatti in classe: rifarli a libro chiuso.

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$, $\cup$ e $^-$ rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in $\mathcal{P}(X)$.
(i) Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole (verificare che sono soddisfatti gli assiomi).
(iii) Enunciare e dimostrare le leggi di idempotenza.
(ii) Enunciare e dimostrare le leggi di assorbimento.
(iv) Enunciare e dimostrare le leggi di De Morgan.

2. Dato un numero naturale n, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 p_2 \cdot p_k$ sia prodotto di k primi *distinti*. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} := \frac{n}{a}$.
(i) Verificare che $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
(ii) Enunciare le leggi di idempotenza in $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$.
(iii) Enunciare le leggi di assorbimento in $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$.
(iv) Enunciare le leggi di De Morgan in $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$.
(v) Sia $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione

$$f \colon \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \ldots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_\alpha}\}$$

è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre o equivalentemente che rispetta le rispettive relazioni di ordine. Cominciare magari coi casi $k = 2$ e $k = 3$).

3. Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ con le operazioni $\oplus$, $\otimes$ e $^-$ definite nel seguente modo:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 1,$$

$$1 \otimes 1 = 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).

4. Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ con le operazioni definite cifra per cifra come nell'esercizio precedente
(a) Qual è l'identità per $\oplus$?
(b) Qual è l'identità per $\otimes$?
(c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$\overline{(001 \otimes 001)} \oplus 100, \quad (111 \otimes 001 \otimes 111) \oplus \overline{100}, \quad (001 \otimes \overline{001}) \otimes \overline{101 \otimes 010} \quad \overline{\overline{101}}.$$

(d) Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).
(e) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Determinare la relazione di ordine parziale corrispondente, definita da x"$\leq$"y se $x \otimes y = x$ (o equivalentemente mediante x"$\leq$"y se $x \oplus y = y$.
(f) Enunciare le leggi di idempotenza.
(g) Enunciare le leggi di assorbimento.
(h) Enunciare le leggi di De Morgan.

5. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita. Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole.