**Esercizio 1.** Determinare quali proprietà possiedono le seguenti relazioni :

(a) In $E = \{\text{Persone}\}$, $a \ R \ b$ se $a$ parla (almeno) tutte le lingue che parla $b$.

(b) In $E = \{\text{Persone}\}$, $a \ R \ b$ se esiste una linea di autobus che collega direttamente la casa di $a$ a quella di $b$.

(c) In $E = \{\text{Parole della lingua italiana}\}$, $x \ R' \ y$ se la lunghezza (i.e. il numero di lettere) di $x$ è minore della lunghezza di $y$.

(d) In $E = \{\text{Parole della lingua italiana}\}$, $x \ R'' \ y$ se $x$ ha la stessa lettera iniziale o finale (eventualmente entrambe) di $y$.

(e) Consideriamo l'intersezione delle relazioni precedenti : $x \ R \ y$ se $x \ R' \ y$ ed $x \ R'' \ y$. Cosa cambia?

(f) In $E = \{\text{Programmi TV}\}$, $x \ R \ y$ se $x$ è in onda allo stesso giorno ed alla stessa ora di $y$.

**Esercizio 2.** Ricordare la definizione di *composizione* di corrispondenze. Sia $\Gamma$ la relazione essere figlio di.

(a) Determinare $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma$ e $\Gamma^3 = \Gamma \circ \Gamma \circ \Gamma$.

(b) Determinare la relazione inversa $\Gamma^{-1}$.

(c) La relazione $\Gamma$ è anche una funzione? In caso di risposta negativa modificare la definizione in modo da renderla tale (ci sono più modi per farlo).

**Esercizio 3.** Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e sia $R$ la seguente relazione : $x \ R \ y$ se $y = x^2$.

(a) Calcolare $R^n$ per ogni $n > 0$ naturale.

(b) Determinare $R^{-1}$.

(c) $R$ è anche una funzione ? Se si discutere eventuali proprietà.

**Esercizio 4.** Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Decidere se le seguenti sono relazioni d'equivalenza e, se lo sono, calcolare le relative classi di equivalenza :

(a) $x \ R \ y$ se $x + y$ è pari.

(b) $x \; R \; y$ se $x + y$ è dispari.

**Esercizio 5.** Siano $R'$ ed $R''$ due relazioni d'equivalenza. Dimostrare che l'intersezione è ancora una relazione d'equivalenza.

**Esercizio 6.** Sia $A = \{*, \diamond, \bullet\}$ un insieme generico di tre elementi. Quante relazioni d'equivalenza posso definire su di esso ? Stessa domanda per $B = \{*, \diamond, \bullet, \times\}$.

**Esercizio 7*.** Sia $A = \{3, 5\}$. Definisco su $\mathbb{N}$ la relazione $R$ in questo modo : $n \; R \; m$ se $n$ ha lo stesso numero di divisori di $m$ appartenenti all'insieme $A$.

(a) Dimostrare che $R$ è una relazione di equivalenza.

(b) Determinare le classi di equivalenza.

(c) Modifico la relazione in questo modo : $n \; R \; m$ se $n$ ha gli *stessi* divisori di $m$ appartenenti all'insieme $A$. Cosa cambia?

**Esercizio 8.** Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ con $A = \emptyset$ and $A = \{0\}$.

**Esercizio 9.** Siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi di un insieme $X$. Dimostrare che :

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) L'uguaglianza nel punto precedente vale se e solo se $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.