Matematica Discreta Tutorato 2

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che le seguenti formule valgono per ogni $n \geq 1$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Esercizio 2. Dimostrare che $2^n > n^2$ per ogni $n \geq 5$.

Esercizio 3. Sia $\alpha > -1$. Dimostrare che, per ogni $n \geq 0$ vale la *disuguaglianza di Bernoulli* :

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n \tag{1}$$

Esercizio 4. Dimostrare che il numero di sottoinsiemi di un insieme A di n elementi è 2^n, ovvero che $\sharp\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Esercizio 5. Dimostrare che ogni numero naturale n ammette una scomposizione in fattori primi.

Esercizio 6. Dimostrare che per ogni $\alpha \neq 1$ vale la seguente formula :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \tag{2}$$

Esercizio 7. Dimostrare che ogni $A \subset \mathbb{N}$ finito ammette massimo.

Esercizio 8. Si definiscono i numeri di Fibonacci ricorsivamente in questo modo : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ed $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$ per ogni $k \geq 2$. Dimostrare che valgono, per ogni $n \geq 1$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

(b) $\mathrm{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Esercizio 9*. Dimostrare che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è $\pi(n-2)$.
Quale n bisogna scegliere come base dell'induzione?

Esercizio 10. Ricordiamo che, per ogni coppia di numeri naturali (a, b) con $b \neq 0$, esistono unici q ed r tali che $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.
Applicare l'algoritmo euclideo alle seguenti coppie di numeri (a, b) :

(a) $(25, 7)$

(b) $(27, 7)$

(c) $(51, 6)$

(d) $(53, 6)$