Matematica Discreta Tutorato 11

Esercizio 1. Utilizzare l'algoritmo di Kruskal per trovare un *albero generatore* per i (multi)grafi *non* orientati in Figura 1 del tutorato 10.

Esercizio 2. Dimostrare il seguente risultato (analogo a quello dimostrato in classe sugli alberi):

Teorema. Sia G un grafo ad n vertici. Allora sono equivalenti :

1. G è una foresta ;
2. G ha k archi ed $n-k$ componenti connesse ;
3. L'eliminazione di ogni arco aumenta di 1 il numero di componenti connesse ;
4. Due vertici in una stessa componente connessa di G sono connessi da un *unico* cammino ;
5. L'aggiunta di un nuovo arco crea *esattamente* un ciclo o diminuisce di 1 il numero di componenti connesse.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{T}_n$ l'insieme degli alberi con un numero $\leq n$ nodi *etichettati* con gli interi da 1 ad n.
Per ogni albero T con un numero maggiore o uguale di 3 vertici, sia T' l'albero ottenuto eliminando la foglia più piccola b di T e sia a il nodo genitore della foglia.
Si definisce ricorsivamente la funzione η (il *codice di Prüfer*) da $\mathcal{T}_n$ all'insieme di *successioni finite* di interi, in questo modo :

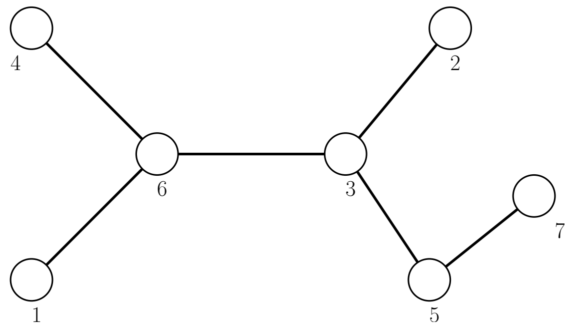
- ◇ $\eta(T) = ()$ se T ha uno o due vertici
- ◇ $\eta(T) = (a, \eta(T'))$ altrimenti

Sapendo che la funzione η è una biezione (riuscireste a dimostrarlo?) rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Quali sono gli alberi corrispondenti ai codici di Prüfer (1234) e (3333) ?

(b) Qual è il codice di Prüfer dell'albero in figura ?

(c) Dedurre il *Teorema di Cayley* ovvero il numero di alberi etichettati su un insieme di n vertici è n^{n-2}.



(d) Quanti sono gli alberi ricoprenti del grafo completo K_n (con vertici etichettati)?

Esercizio 4. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti per un albero T di $n \geq 2$ nodi :

(a) T ammette un cammino euleriano ;

(b) T ha esattamente 2 vertici di grado 1 ;

(c) T ha esattamente $n-2$ vertici di grado 2 .

Esercizio 5. Sia T un albero e T_i per $i = 1 \dots k$ suoi sottoalberi tali che T_i ha un nodo in comune con T_j per ogni $1 \leq i < j \leq k$. Dimostrare che T ha un nodo che appartiene ad *ogni* sottoalbero.