Matematica Discreta

CdL in Informatica

Università di Roma Tor Vergata

A.A. 2017/2018

Tutorato 13 Dicembre

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $D = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$ ordinato mediante la divisibilità. D è un reticolo?

Esercizio 2. Sia D_{104} l'insieme dei numeri naturali divisori di 104, dotato della relazione d'ordine di *divisibilità*, e sia $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ l'insieme delle parti dell'insieme $\{g\,,p\,,q\}$, dotato della relazione d'ordine di *inclusione*; in particolare, entrambi sono insiemi ordinati.

a) D_{104} è *limitato*? $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è *limitato*? In ciascuno dei due casi, se la risposta è negativa se ne spieghi il perché, se invece è affermativa si precisi quali siano i limiti.

b) D_{104} è un *reticolo*? $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è un *reticolo*?

c) L'ordine in D_{104} è *totale*? L'ordine in $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è *totale*?

d) Quali sono — se esistono — gli *atomi* di D_{104} e gli *atomi* di $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$?

e) D_{104} è un'*algebra di Boole*? $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è un'*algebra di Boole*?

Esercizio 3. Dato l'insieme $\mathbb{T} := \{\,18\,,3\,,70\,,1\,,10\,,630\,,14\,\}$, si consideri in esso la relazione (d'ordine) di divisibilità, indicata qui di seguito con δ.

a) Verificare che l'insieme ordinato $\big(\,\mathbb{T}\,;\delta\,\big)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{T}$.

b) Determinare il minimo, il massimo, tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili del reticolo $\mathbb{T}$.

c) Determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *fattori* $\vee$*–irriducibili* per l'elemento 630 nel reticolo $\mathbb{T}$. In caso affermativo, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

d) Determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *atomi* per l'elemento 630 nel reticolo $\mathbb{T}$. In caso affermativo, si determini esplicitamente (almeno) una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.

e) Stabilire, giustificando adeguatamente la risposta, se il reticolo $\big(\,\mathbb{T}\,;\delta\,\big)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

Esercizio 4. Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 315$ e $n := 165$.

a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili di D_{315} e di D_{165}.

b) Determinare una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili degli elementi $b := 45 \in D_{315}$, $d := 55 \in D_{165}$ e $q := 15 \in D_{165}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

c) D_{315} è un'algebra di Boole? D_{165} è un'algebra di Boole?

Esercizio 5. Sia $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$ l'insieme delle parti dell'insieme $\{S,P,Q,R\}$ e "$\supseteq$" la consueta relazione di "inclusione inversa" in $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$, definita da $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ se e soltanto se $\mathcal{A}$ contiene $\mathcal{B}$ — per ogni $\mathcal{A}\,,\mathcal{B} \in \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$.
Sia poi $D_{60} := \big\{\, d \in \mathbb{N} \,\big|\, d$ è divisore di $60 \,\big\}$ l'insieme dei divisori di 60, e sia "$\,\big|\,$" la consueta relazione di divisibilità in D_{60}.
Nell'insieme $E := \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big) \times D_{60}$ prodotto cartesiano di $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$ con D_{60} consideriamo la relazione $\preceq$ definita da

$$\big(\mathcal{A}\,,d\,\big) \preceq \big(\mathcal{B}\,,q\,\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B} \;\;,\;\; d\,\big|\,q$$

per ogni $\big(\mathcal{A}\,,d\,\big)\,,\big(\mathcal{B}\,,q\,\big) \in \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big) \times D_{60} =: E$.

a) Dimostrare che $\preceq$ è una relazione d'ordine in E.

b) Esiste un *minimo* nell'insieme ordinato $\big(E\,;\preceq\big)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale minimo.

c) Esiste un *massimo* nell'insieme ordinato $\big(E\,;\preceq\,\big)$? In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, precisare quale sia tale massimo.

d) Dimostrare che l'insieme ordinato $\big(E\,;\preceq\big)$ è un reticolo, *precisando come siano fatte le operazioni* "$\vee := sup$" *e* "$\wedge := inf$" in tale reticolo.

e) Determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione in $\vee$–irriducibili per l'elemento $\big(\{S,Q\}\,,30\big)$ nel reticolo $\big(E\,;\preceq\,\big)$. In caso negativo, si spieghi perché una tale $\vee$–fattorizzazione non esista; in caso affermativo, si determini esplicitamente una tale $\vee$–fattorizzazione.

Esercizio 6. Dimostrare che (D_n, δ) è complementato *se e soltanto se* n è prodotto di primi *distinti.* In questo caso, dare una formula per il complemento di un elemento.

Esercizio 7. Siano L, L', L'' reticoli e $f : L \longrightarrow L'$ $g : L' \longrightarrow L''$ isomorfismi tra reticoli. Dimostrare che:

a) $f^{-1} : L' \longrightarrow L$ è un isomorfismo tra reticoli;

b) $f \circ g : L \longrightarrow L''$ è un isomorfismo tra reticoli.

Esercizio 8. Dimostrare che: $D_n \cong D_s \Longleftrightarrow n$ e s hanno fattorizzazioni (in primi distinti) $n = p_1^{e_1} \cdots p_h^{e_h}$ e $s = q_1^{f_1} \cdots q_h^{f_h}$ con $h = k$, $e_1 = f_1, \ldots, e_k = f_k$.

Esercizio 9. Determinare se esista un isomorfismo tra due (o più) dei seguenti reticoli: (D_n, δ) con $n = 18, 30, 105$ e $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$.

Esercizio 10. Si dia un esempio di un sottoinsieme M di un reticolo L tale che M sia un reticolo con l'ordine indotto da L ma *non* sia un sottoreticolo di L

Esercizio 11. Si dia un esempio di reticolo *non distributivo* che abbia più di 5 elementi.