Matematica Discreta

CdL in Informatica

Università di Roma Tor Vergata

A.A. 2017/2018

Tutorato 17 Gennaio

Esercizio 1. Dimostrare che K_n, il grafo completo con n vertici, ha esattamente $\binom{n}{2}$ spigoli.

Esercizio 2. Dimostrare che in un multigrafo finito il numero di vertici di grado dispari è pari.

Esercizio 3. Dimostrare che se G è un multidigrafo e $\overline{G}$ è il multigrafo associato allora

$$A_{\overline{G}} = A_G + A_G^T$$

dove A_G e $A_{\overline{G}}$ sono le matrici di adiacenza rispettivamente di G e $\overline{G}$.

Esercizio 4. Sia $G := (V, E)$ un multigrafo. Sia κ_G la relazione così definita:

$$\forall u, v \in V \qquad u \, \kappa_G \, v \iff \exists \text{ un cammino in } G \text{ da } u \text{ a } v.$$

Dimostrare che κ_G è una relazione di equivalenza.

Esercizio 5. Dati i multigrafi (o multidigrafi) finiti $G_1, \dots, G_k$ e le rispettive matrici di adiacenza $A_1, \dots, A_k$, determinare $A_{G_1 \coprod \cdots \coprod G_k}$ matrice di adiacenza del multigrafo (o multidigrafo) $G_1 \coprod \cdots \coprod G_k$.

NB. *Se $G_i := (V_i, E_i)$ sono multidigrafi (risp. multigrafi) $\forall i = 1, \dots, k$, si dice unione di $G_1, \dots, G_k$ il multidigrafo (risp. multigrafo) $G_1 \coprod \cdots \coprod G_k := (V_1 \coprod \cdots \coprod V_k,\ E_1 \coprod \cdots \coprod E_k)$.*

Esercizio 6. Si consideri il multigrafo G, avente esattamente quattro vertici v_1, v_2, v_3, v_4, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare il grado di ciascun vertice di G.

b) Determinare gli eventuali cappi di G.

c) Determinare gli eventuali spigoli multipli di G.

d) Determinare se G è euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano.

e) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multigrafo G.

Esercizio 7. Si consideri il multigrafo G, avente esattamente otto vertici v_1, v_2, ..., v_8, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se esista una partizione in *cicli* dell'insieme E degli spigoli di G. In caso positivo, si trovi esplicitamente una tale partizione; in caso negativo, si spieghi perché una tale partizione non esista.

b) Determinare se il multigrafo G sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si trovi esplicitamente un cammino euleriano in G, indicandone la successione di vertici e spigoli.

Esercizio 8. Si consideri il multidigrafo $\overrightarrow{G}$, avente esattamente cinque vertici v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\overrightarrow{G}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se il multidigrafo $\overrightarrow{G}$ sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano in $\overrightarrow{G}$, indicandone la successione di vertici e archi.

b) Determinare la matrice di adiacenza del multigrafo $\overline{G}$ associato (o "soggiacente") al multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

c) Determinare se il multigrafo $\overline{G}$ sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano in $\overline{G}$, indicandone la successione di vertici e spigoli.

d) Determinare se il multigrafo $\overline{G}$ (associato a $\overrightarrow{G}$) sia connesso. In caso negativo, indicare almeno due vertici che appartengano a componenti connesse diverse.