Matematica Discreta

CdL in Informatica

Università di Roma Tor Vergata

$\mathcal{A}.\mathcal{A}.$ 2017/2018

Tutorato 6 Dicembre

Esercizio 1. Siano E_1 ed E_2 due insiemi non vuoti, nei quali siano date rispettivamente la relazione ω_1 e la relazione ω_2 . Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri la relazione ω definita da

$$\left(e'_1, e'_2\right) \omega \left(e''_1, e''_2\right) \iff e'_1\,\omega_1\,e''_1\,,\; e'_2\,\omega_2\,e''_2 \qquad\qquad \forall\; \left(e'_1, e'_2\right), \left(e''_1, e''_2\right) \in E_1 \times E_2$$

Dimostrare che:

a) se ω_1 e ω_2 sono riflessive, allora anche ω è riflessiva;

b) se ω_1 e ω_2 sono simmetriche, allora anche ω è simmetrica;

c) se ω_1 e ω_2 sono antisimmetriche, allora anche ω è antisimmetrica;

d) se ω_1 e ω_2 sono transitive, allora anche ω è transitiva;

e) se ω_1 e ω_2 sono equivalenze, allora anche ω è un'equivalenza;

f) se ω_1 e ω_2 sono ordini, allora anche ω è un ordine (detto *ordine prodotto* su $E_1 \times E_2$);

g) se ω_1 e ω_2 sono entrambi ordini *totali*, allora ω è un ordine totale se e soltanto se si ha $\left|E_1\right| = 1$ oppure $\left|E_2\right| = 1$.

Esercizio 2. Sia E un insieme non vuoto, nel quale sia data la relazione ω_1 , sia X un altro insieme non vuoto. Nell'insieme E^X di tutte le funzioni da X a E si consideri la relazione ω^X definita da

$$f\,\omega^X\,\ell \iff f(x)\,\omega\,\ell(x) \quad \forall\, x \in X \qquad\qquad \forall\; f, \ell \in E^X$$

Dimostrare che:

a) se ω è riflessiva, allora anche ω^X è riflessiva;

b) se ω è simmetrica, allora anche ω^X è simmetrica;

c) se ω è antisimmetrica, allora anche ω^X è antisimmetrica;

d) se ω è transitiva, allora anche ω^X è transitiva;

e) se ω è un'equivalenza, allora anche ω^X è un'equivalenza;

f) se ω è un ordine, allora anche ω^X è un ordine (detto ordine standard);

g) se ω è un ordine *totale*, allora ω è (un ordine) totale se e soltanto se si ha $\left|E\right| = 1$.

Esercizio 3. Sia E un insieme e $\preceq$ un ordine su E. Dimostrare che se $\preceq$ è buono allora $\preceq$ è totale.

Esercizio 4. Siano E_1 ed E_2 due insiemi ordinati, e si consideri in $E_1 \times E_2$ l'ordine prodotto. Dimostrare che:

a) esistono $\min(E_1)$ e $\min(E_2)$ *se e solo se* esiste $\min\big(E_1 \times E_2\big)$, in tal caso $\min\big(E_1 \times E_2\big) = \big(\min(E_1)\,,\min(E_2)\big)$;

b) esistono $\max(E_1)$ e $\max(E_2)$ *se e solo se* esiste $\max\big(E_1 \times E_2\big)$, in tal caso $\max\big(E_1 \times E_2\big) = \big(\max(E_1)\,,\max(E_2)\big)$.

Esercizio 5. Sia E un insieme ordinato, sia X un altro insieme, e si consideri in E^X l'ordine standard. Dimostrare che:

a) esiste $\min(E)$ *se e solo se* esiste anche $\min\big(E^X\big)$, in tal caso $\min\big(E^X\big)$ è dato dalla funzione costante $f_{min} \in E^X$ tale che $f_{min}(x) := \min(E)$ per ogni $x \in X$;

b) esiste $\max(E)$ *se e solo se* esiste anche $\max\big(E^X\big)$, in tal caso $\max\big(E^X\big)$ è dato dalla funzione costante $f_{max} \in E^X$ tale che $f_{max}(x) := \max(E)$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 6. Sia $D_n = \{\text{divisori di } n\}$ con l'ordinamento δ dato da $a\,\delta\,b$ se a divide b.
Disegnare i diagrammi di Hasse di $D_{27}\,, D_{15}\,, D_{42}$.

Esercizio 7. Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$ ordinato per inclusione.

Esercizio 8. Si consideri $D = D_6 \times D_{10}$ ordinati tramite l'*ordinamento lessicografico.* Trovare (se esistono) inf e sup di $\{(2,2),(2,5)\}$ e $\{(3,1),(2,5)\}$. D è un reticolo?

Esercizio 9. Si consideri il sottoinsieme $\mathcal{D}' := \{4\,,5\,,6\,,8\,,9\,,12\,,18\,,36\,,40\,,60\,,72\,,90\,,120\}$ in $\mathcal{D}_{360}$ insieme dei divisori di 360 dotato della relazione d'ordine di divisibilità. Relativamente a tale relazione d'ordine, si risponda alle seguenti domande.

a) Esiste un *massimo* in $\mathcal{D}'$? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

b) Esistono in $\mathcal{D}'$ degli elementi *minimali*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

c) Rispetto all'assegnata relazione (d'ordine) di divisibilità, l'insieme ordinato $\mathcal{D}'$ è un reticolo?

Esercizio 10. Dato l'insieme $\{S\,,P\,,Q\,,R\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}\big(\{S\,,P\,,Q\,,R\}\big)$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ con $\underline{x_1\,x_2\,\dots x_n} := \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Si consideri poi in $\mathcal{P}\big(\{S\,,P\,,Q\,,R\}\big)$ il sottoinsieme

$$\mathbb{F} := \big\{\,\emptyset\,,\underline{S}\,,\underline{Q}\,,\underline{R}\,,\underline{S\,P}\,,\underline{Q\,R}\,,\underline{S\,P\,Q\,R}\,\big\}$$

dotato a sua volta della relazione (d'ordine) di inclusione.

a) Verificare che l'insieme ordinato $\big(\,\mathbb{F}\,;\subseteq\,\big)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x,y)$ e $\inf(x,y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{F}$.

b) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili del reticolo $\mathbb{F}$.

c) Esiste una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in *fattori* $\vee$*–irriducibili* per l'elemento $\underline{S\,P\,Q\,R}$ nel reticolo $\mathbb{F}$? In caso affermativo, si determini esplicitamente una tale $\vee$–fattorizzazione; in caso negativo, si spieghi perché essa non esista.