Matematica Discreta

CdL in Informatica
Università di Roma Tor Vergata
A.A. 2017/2018

Tutorato 25 Ottobre

Esercizio 1. Dati tre insiemi A, B e C, dimostrare che valgono le seguenti identità:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

c) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

d) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

Esercizio 2. Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ dove $A = \emptyset$ e $A = \{0\}$.

Esercizio 3. Siano A e B due sottoinsiemi di un insieme X. Dimostrare che:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

c) l'uguaglianza vale *se e solo* se $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Esercizio 4. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione tra insiemi. Dimostrare che:

a) $\forall A' \subseteq A, \qquad f^{-1}(f(A')) \supseteq A'$

b) $\forall B' \subseteq B, \qquad f\left(f^{-1}(B')\right) \subseteq B'$

Esercizio 5. Sia l'insieme $E := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$. Si descrivano esplicitamente le funzioni biunivoche $\mathcal{P}(E) \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \underline{2}^E$ e $\underline{2}^E \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(E)$, inverse l'una dell'altra, canonicamente associate agli insiemi $\mathcal{P}(E)$ e $\underline{2}^E$.

Esercizio 6. Siano A e B due insiemi. Dimostrare le seguenti implicazioni:

a) se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ sono funzioni tali che $g \circ f = id_A$, allora g è suriettiva e f è iniettiva;

b) se $h : A \dashrightarrow B$ e $k : B \dashrightarrow A$ sono corrispondenze tali che $k \circ h = id_A$ e $h \circ k = id_B$, allora h e k sono funzioni (dunque invertibili, inverse l'una dell'altra).

Esercizio 7. Costruire una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tale che:

a) f sia iniettiva ma non suriettiva;

b) f sia suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio 8. Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ due funzioni. Dimostrare che:

a) se f e g sono iniettive, allora anche la composizione $g \circ f$ è iniettiva;

b) se la composizione $g \circ f$ è iniettiva, allora anche f è iniettiva (mentre g, in generale, può *non* esserlo);

c) se f e g sono suriettive, allora anche la composizione $g \circ f$ è suriettiva;

d) se la composizione $g \circ f$ è suriettiva, allora anche g è suriettiva (mentre f, in generale, può *non* esserlo).

Esercizio 9. Sia S l'insieme degli stati della Terra, e sia ρ la relazione di "confinanza" in S, data da $s_1 \; \rho \; s_2 \iff s_1$ confina con s_2 $(\forall s_1, s_2 \in S)$, dove "confina con" significa "ha una parte non vuota dei suoi confini (per terra o per mare) in comune con". Verificare che la relazione ρ è *riflessiva* e *simmetrica* ma *non transitiva*.

Esercizio 10. Siano R' e R'' due relazioni di equivalenza. Dimostrare che la loro *intersezione* è ancora una relazione di equivalenza.

Esercizio 11. Sia $\preceq$ una relazione in un insieme E e sia $\succeq \, := \, \preceq^{-1}$ la relazione inversa. Dimostrare che:

a) se $\preceq$ è un *preordine*, allora anche $\succeq$ è un *preordine*;

b) se $\preceq$ è un *ordine*, allora anche $\succeq$ è un *ordine*;

c) se $\preceq$ è un *ordine totale*, allora anche $\succeq$ è un *ordine totale*.

Esercizio 12. Sia $\vdash$ una relazione in un insieme $E \neq \emptyset$ che sia un *preordine*. Dimostrare che la relazione σ in E definita da $a \; \sigma \; b \iff (a \vdash b) \wedge (b \vdash a) \, (\forall a, b \in E)$ è una equivalenza in E. Descriverne le singole classi di equivalenza.

Esercizio 13. Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione tra insiemi, sia ω una relazione in Y e sia ω_f la relazione in X definita da $x' \; \omega_f \; x'' \iff f(x') \; \omega \; f(x''), \;\; \forall x', x'' \in X$. Dimostrare che valgono le seguenti implicazioni tra proprietà di ω e proprietà di ω_f:

a) se ω è riflessiva (in Y), allora anche ω_f è riflessiva (in X);

b) se ω è simmetrica (in Y), allora anche ω_f è simmetrica (in X);

c) se ω è transitiva (in Y), allora anche ω_f è transitiva (in X);

d) se ω è antisimmetrica (in Y), allora ω_f è antisimmetrica (in X) *se e soltanto se* la funzione f è iniettiva.

Esercizio 14. Si considerino gli insiemi $E := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, $E_+ := \{\sharp, \flat, \spadesuit\}$, $E^\circ := E \cup E_+$. Si consideri poi la funzione

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E^\circ) \, , \qquad E' \longmapsto f(E') := E' \cup E_+ \qquad \forall E' \in \mathcal{P}(E)$$

e sia $\propto$ la relazione definita da

$$E' \propto E'' \iff f(E') \supseteq f(E'')$$

a) Dimostrare che la funzione f è *non iniettiva*.

b) Dimostrare che la funzione f è *non suriettiva*.

c) Dimostrare che la relazione $\propto$ è *riflessiva* e *transitiva* ma *non antisimmetrica*.

d) Determinare, se esiste, un elemento $E_\downarrow \in \mathcal{P}(E)$ tale che $E_\downarrow \propto E'$ per ogni $E' \in \mathcal{P}(E)$.

e) Determinare, se esiste, un elemento $E^\uparrow \in \mathcal{P}(E)$ tale che $E' \propto E^\uparrow$ per ogni $E' \in \mathcal{P}(E)$.