# Matematica Discreta
**CdL in Informatica**

*Università di Roma Tor Vergata*

*A.A. 2017/2018*

Tutorato 22 Novembre

**Esercizio 1.** a) Calcolare M.C.D. $(1812\,,\,724)$ ed una identità di Bézout per esso.

b) Calcolare, se possibile, una soluzione per ciascuna delle due equazioni diofantee:

$$1812\,x + 724\,y = 14 \qquad 1812\,x + 724\,y = 12$$

**Esercizio 2.** Determinare il minimo $n \in \mathbb{N}$ tale che l'equazione diofantea $1001\,x + 770\,y = 848 + n$ ammetta soluzione intera.

**Esercizio 3.** Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ :

a) $\mathbb{Z}_n$ è un *dominio di integrità* $\iff$ $n$ è primo;

b) $\mathbb{Z}_n$ è un *campo* $\iff$ $n$ è irriducibile;

c) $\mathbb{Z}_n$ è un *campo* $\iff$ $\mathbb{Z}_n$ è un *dominio di integrità* (senza utilizzare (a) e (b)).

**Esercizio 4.** Calcolare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni congruenziali:

a) $259\,x \equiv 16 \;\big(\text{mod } 11\big)$

b) $7\,x \equiv 5 \;\big(\text{mod } 256\big)$

c) $73\,x \equiv -101 \;\big(\text{mod } 35\big)$

**Esercizio 5.** a) Determinare se esistano le classi inverse $\overline{9}^{\,-1}$, $\overline{5}^{\,-1}$, $\overline{7}^{\,-1}$, $\big(\overline{9}\cdot\overline{7}\big)^{-1}$ e $\big(\overline{5}\cdot\overline{7}\big)^{-1}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{20}$ degli interi modulo $20$. In caso negativo, si spieghi perché tale classe inversa non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la suddetta classe inversa.

b) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione modulare $\overline{647}\,\overline{x} = \overline{-516}$ in $\mathbb{Z}_{20}$.

c) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione congruenziale $436\,x \equiv 92\,\big(\text{mod } 20\big)$ in $\mathbb{Z}$.

**Esercizio 6.** Siano $\mathbb{Z}_{11}$ e $\mathbb{Z}_{12}$ gli anelli delle classi resto modulo 11 e modulo 12 rispettivamente, con le consuete operazioni di somma e prodotto.

a) Determinare gli elementi di $U\big(\mathbb{Z}_{11}\big)$ e di $U\big(\mathbb{Z}_{12}\big)$, insiemi degli invertibili in $\mathbb{Z}_{11}$ e in $\mathbb{Z}_{12}$ rispettivamente;

b) Calcolare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ dell'equazione congruenziale $45\,x \equiv -135\;\big(\text{mod }\; 12\big)$;

c) Per *entrambi* i valori $q = 11$ e $q = 12$, determinare se esista un elemento $\overline{z} \in \mathbb{Z}_q \setminus \big\{\,\overline{0}\,\big\}$ tale che $\overline{z}^{\,n} = \overline{0}$ per qualche esponente $n \in \mathbb{N}$. In caso negativo, si spieghi il perché; in caso affermativo, si determinino esplicitamente un tale elemento $\overline{z}$ e un esponente $n$ tali che $\overline{z}^{\,n} = \overline{0}$.

**Esercizio 7.** Per ciascuno dei due valori $n = 14$ e $n = 13$ si consideri il rispettivo anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto modulo $n$.

a) Calcolare i due insiemi degli elementi invertibili $U(\mathbb{Z}_{14})$ e $U(\mathbb{Z}_{13})$.

b) Risolvere, se possibile, ciascuna delle tre equazioni seguenti:

$$\overline{21}\cdot\overline{x} = -\overline{35} \;\; in \;\; \mathbb{Z}_{14} \qquad \overline{13}\cdot\overline{x} = \overline{20} \;\; in \;\; \mathbb{Z}_{14} \qquad \overline{21}\cdot\overline{x} = -\overline{35} \;\; in \;\; \mathbb{Z}_{13}$$