ESERCIZI sulle RELAZIONI - 2

— Fabio GAVARINI —

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Siano E_1 ed E_2 due insiemi non vuoti, nei quali siano date rispettivamente la relazione ω_1 e la relazione ω_2 . Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri la relazione ω così definita (detta *"prodotto"* $\omega_1 \times \omega_2$):

$$\left(e'_1, e'_2\right) \omega \left(e''_1, e''_2\right) \iff e'_1 \,\omega_1\, e''_1 \,,\ e'_2 \,\omega_2\, e''_2 \qquad \forall \left(e'_1, e'_2\right), \left(e''_1, e''_2\right) \in E_1 \times E_2$$

Dimostrare che:

(a) se ω_1 e ω_2 sono riflessive, allora anche ω è riflessiva;

(b) se ω_1 e ω_2 sono simmetriche, allora anche ω è simmetrica;

(c) se ω_1 e ω_2 sono antisimmetriche, allora anche ω è antisimmetrica;

(d) se ω_1 e ω_2 sono transitive, allora anche ω è transitiva;

(e) se ω_1 e ω_2 sono equivalenze, allora anche ω è un'equivalenza;

(f) se ω_1 e ω_2 sono ordini, allora anche ω è un ordine (detto *ordine prodotto* su $E_1 \times E_2$);

(g) se ω_1 e ω_2 sono entrambi ordini *totali*, allora ω è un ordine totale se e soltanto se si ha $\left|E_1\right| = 1$ oppure $\left|E_2\right| = 1$.

2 — Sia E un insieme non vuoto, nel quale sia data la relazione ω , sia X un altro insieme non vuoto. Nell'insieme E^X di tutte le funzioni da X a E si consideri la relazione ω^X definita da

$$f \,\omega^X\, \ell \iff f(x) \,\omega\, \ell(x) \quad \forall\, x \in X \qquad\qquad \forall\ f, \ell \in E^X$$

Dimostrare che:

(a) se ω è riflessiva, allora anche ω^X è riflessiva;

(b) se ω è simmetrica, allora anche ω^X è simmetrica;

(c) se ω è antisimmetrica, allora anche ω^X è antisimmetrica;

(d) se ω è transitiva, allora anche ω^X è transitiva;

(e) se ω è un'equivalenza, allora anche ω^X è un'equivalenza;

(f) se ω è un ordine, allora anche ω^X è un ordine;

(g) se ω è un ordine *totale*, allora ω^X è (un ordine) totale se e soltanto se si ha $\left|E\right| = 1$.

3 — Siano E_1 ed E_2 due insiemi non vuoti, nei quali siano date rispettivamente la relazione d'ordine $\preceq_1$ e la relazione d'ordine $\preceq_2$. Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri la relazione $\preceq \, = \, \preceq_1 \underset{\text{lex}}{\times} \preceq_2$ (detta *"prodotto lessicografico"*) così definita: per ogni $\left(e'_1, e'_2\right), \left(e''_1, e''_2\right) \in E_1 \times E_2$, si pone

$$\left(e'_1, e'_2\right) \preceq \left(e''_1, e''_2\right) \iff \left(e'_1 \preceq_1 e''_1 \, , \; e'_1 \neq e''_1\right) \text{ oppure } \left(e'_1 = e''_1 \, , \; e'_2 \preceq_2 e''_2\right)$$

Dimostrare che:

(a) $\preceq \, = \, \preceq_1 \underset{\text{lex}}{\times} \preceq_2$ è una relazione d'ordine;

(b) se $\preceq_1$ e $\preceq_2$ sono (relazioni d'ordine) *totali*, allora anche $\preceq \, = \, \preceq_1 \underset{\text{lex}}{\times} \preceq_2$ è *totale*.

4 — Sia X un insieme e siano $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{R}_X := \mathcal{P}\big(X \times X\big)$ due relazioni in E.
Dimostrare che:

(a) ρ_1, ρ_2 riflessive $\implies$ $\rho_1 \cap \rho_2$ riflessiva, $\rho_1 \cup \rho_2$ riflessiva;

(b) ρ_1, ρ_2 simmetriche $\implies$ $\rho_1 \cap \rho_2$ simmetrica, $\rho_1 \cup \rho_2$ simmetrica;

(c) ρ_1, ρ_2 antisimmetriche $\implies$ $\rho_1 \cap \rho_2$ antisimmetrica, *ma* $\rho_1 \cup \rho_2$ *non* è antisimmetrica, in generale; in particolare, si trovi un esempio di uno specifico insieme X' e di specifiche relazioni ρ'_1 e ρ'_2 tali che ρ'_1 e ρ'_2 siano antisimmetriche mentre invece $\rho'_1 \cup \rho'_2$ *non* è antisimmetrica.

(d) ρ_1, ρ_2 transitive $\implies$ $\rho_1 \cap \rho_2$ transitiva, *ma* $\rho_1 \cup \rho_2$ *non* è transitiva, in generale; in particolare, si trovi un esempio di uno specifico insieme X' e di specifiche relazioni ρ'_1 e ρ'_2 tali che ρ'_1 e ρ'_2 siano transitive mentre invece $\rho'_1 \cup \rho'_2$ *non* è transitiva.

(e) se ρ_1 sono ρ_2 transitive, si determini la più piccola — rispetto alla relazione di inclusione $\subseteq$ — relazione in X che contenga ρ_1 e ρ_2 e che sia transitiva.

5 — Sia data in $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione binaria η definita da

$$(a,b) \; \eta \; (c,d) \; \overset{\Delta}{\iff} \; a + d = c + b \qquad \forall \; (a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^2 \; .$$

(a) Dimostrare che η è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di η e l'insieme quoziente $\mathbb{N}^2 \big/ \eta$, dando una biiezione esplicita da $\mathbb{N}^2 \big/ \eta$ all'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

6 — Sia data in $\mathbb{N}_+^2 := \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ la relazione binaria λ definita da

$$(a,b) \; \lambda \; (c,d) \; \overset{\Delta}{\iff} \; a \cdot d = c \cdot b \qquad \forall \; (a,b), (c,d) \in \mathbb{N}_+^2 \; .$$

(a) Dimostrare che λ è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di λ e l'insieme quoziente $\mathbb{N}_+^2 \big/ \lambda$, dando una biiezione esplicita da $\mathbb{N}_+^2 \big/ \lambda$ all'insieme $\mathbb{Q}_+$ dei numeri razionali positivi.

7 — Sia data in $\mathbb{Z}_\bullet^{[2]} := \mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\big)$ la relazione binaria ϑ definita da

$$(a,b)\,\vartheta\,(c,d\,) \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad a \cdot d = c \cdot b \qquad\qquad \forall\ (a,b)\,,(c,d\,) \in \mathbb{Z}_\bullet^{[2]} \ .$$

(a) Dimostrare che ϑ è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di ϑ e l'insieme quoziente $\mathbb{Z}_\bullet^{[2]}\big/\vartheta$, dando una biiezione esplicita da $\mathbb{Z}_\bullet^{[2]}\big/\vartheta$ all'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

8 — Sia data in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ la relazione binaria θ definita da

$$(a,b)\,\theta\,(c,d\,) \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad a \cdot d = c \cdot b \qquad\qquad \forall\ (a,b)\,,(c,d\,) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \ .$$

(a) Dimostrare che θ è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di θ in $\big(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+\big)$ e l'insieme quoziente $\big(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+\big)\big/\theta$, dando una biiezione esplicita da $\big(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+\big)\big/\theta$ all'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

9 — Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $\equiv_n$ la relazione in $\mathbb{Z}$ — detta "congruenza modulo n" — definita da

$$z' \equiv_n z'' \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\ d \in \mathbb{Z}\ :\ z' - z'' = d\,n \qquad\qquad \forall\ z', z'' \in \mathbb{Z}$$

dove la condizione a destra si può leggere più sinteticamente " n divide $\big(z' - z''\big)$ ".

(a) Dimostrare che $\equiv_n$ è un'equivalenza.

(b) Dimostrare che $\equiv_n \,=\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \iff n = 0$.

(c) Dimostrare che $\equiv_n \,=\, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \iff n \in \{+1\,,-1\}$.

(d) Dimostrare che $\equiv_{n'} \,=\, \equiv_{n''} \iff n' + n'' = 0 \quad \big(\forall\, n', n'' \in \mathbb{N}\big)$.

(e) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di $\equiv_n$.

10 — Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione $\lessdot$ definita da

$$h \lessdot k \quad \Longleftrightarrow \quad \Big|\big\{\, x \in \{2,5\} \,\big|\, x\,\delta_{\mathbb{N}} h \,\big\}\Big| \;\leq\; \Big|\big\{\, y \in \{2,5\} \,\big|\, y\,\delta_{\mathbb{N}} k \,\big\}\Big| \qquad\qquad \forall\ h,k \in \mathbb{N}$$

dove $\delta_{\mathbb{N}}$ indica la consueta relazione di divisibilità in $\mathbb{N}$.

(a) Dimostrare che la relazione $\lessdot$ è una relazione di preordine in $\mathbb{N}$.

(b) Dimostrare che la relazione $\lessdot$ *non* è una relazione di ordine in $\mathbb{N}$.

(c) Dimostrare che la relazione $\lessdot\!\!\gtrdot := \lessdot \cap \gtrdot = \lessdot \cap \lessdot^{-1}$ è una relazione di equivalenza.

(d) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\Big|\,\mathbb{N}\big/\lessdot\!\!\gtrdot\,\Big|$.

(e) Descrivere esplicitamente le cinque classi di $\lessdot\!\!\gtrdot$ –equivalenza $[28]_{\lessdot\!\gtrdot}$, $[15]_{\lessdot\!\gtrdot}$, $[21]_{\lessdot\!\gtrdot}$, $[38]_{\lessdot\!\gtrdot}$ e $[30]_{\lessdot\!\gtrdot}$.

11 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri la relazione η definita da

$$a \,\eta\, b \iff a^2 - b^2 = 4\,b - 4\,a \qquad \forall \;\; a, b \in \mathbb{Z}$$

(a) Dimostrare che la relazione η è un'equivalenza.

(b) Determinare esplicitamente almeno un numero $c \in \mathbb{Z}$ tale che $c \not\eta\,(-1)$, cioè c *non sia* η–equivalente a (-1).

(c) Determinare esplicitamente un numero $k \in \mathbb{Z}$ diverso da (-1) e tale che $k\,\eta\,(-1)$.

12 — Si consideri l'insieme $\mathbb{S} := \{\flat, \natural, \sharp\}$ e il relativo insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{S})$; si considerino poi in $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ le due relazioni η e $\multimap$ definite da

$$\begin{array}{rcl} S' \,\eta\, S'' & \iff & \big|\,\mathbb{S} \setminus S'\,\big| = \big|\,\mathbb{S} \setminus S''\,\big| \\ S' \multimap S'' & \iff & \Big(\,\big|\,S'\,\big| \lneqq \big|\,S''\,\big| \;\text{ oppure }\; S' = S''\,\Big) \end{array} \qquad \forall \;\; S', S'' \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$$

(a) Dimostrare che la relazione η è una equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di η.

(c) Dimostrare che la relazione $\multimap$ è una relazione d'ordine, e che essa *non* è totale.

13 — Si consideri l'insieme $E := \{S, P, Q, R\}$, il suo sottoinsieme $E_0 := \{S, P\}$ e l'insieme delle parti $\mathcal{P}(E)$ di E. Si consideri in $\mathcal{P}(E)$ la relazione η definita da

$$E' \,\eta\, E'' \iff E' \cap E_0 = E'' \cap E_0 \qquad \forall \;\; E', E'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la relazione η è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di η–equivalenza in $\mathcal{P}(E)$.

(c) Dimostrare che, dati $E_1, E_2, E_\star \in \mathcal{P}(E)$, vale per η la seguente proprietà:

$$\big(E_1 \,\eta\, E_\star\big) \;\;\&\;\; \big(E_2 \,\eta\, E_\star\big) \quad\Longrightarrow\quad \big(E_1 \cap E_2\big)\,\eta\, E_\star \;\;\&\;\; \big(E_1 \cup E_2\big)\,\eta\, E_\star$$

14 — Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione χ data da

$$n' \,\chi\, n'' \iff \Big|\big\{\, p \in \{3\,,5\} \,\big|\, p \text{ divide } n' \,\big\}\Big| = \Big|\big\{\, q \in \{3\,,5\} \,\big|\, q \text{ divide } n'' \,\big\}\Big|$$

(a) Dimostrare che χ è una relazione di *equivalenza*.

(b) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}_+ \big/ \chi$.

(c) Calcolare le classi di χ–equivalenza $[13]_\chi$, $[60]_\chi$, $[90]_\chi$, $[55]_\chi$, $[5]_\chi$ e $[51]_\chi$.

(d) Calcolare (cioè descrivere esplicitamente) tutte le classi di χ–equivalenza in $\mathbb{N}_+$.

15 — Si considerino l'insieme $\mathbb{V}_I := \{\,\text{parole della lingua italiana}\,\}$ e l'insieme di lettere $X := \{B, I, T\,\}$. Si consideri poi in $\mathbb{V}_I$ la relazione $\lhd$ definita da

$$\mathcal{P}_1 \lhd \mathcal{P}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{“}\textit{la parola } \mathcal{P}_1 \textit{ contiene al più tante lettere}\\ \text{di } X \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2\text{”}\end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione $\lhd$ è una relazione di preordine in $\mathbb{V}_I$, ma *non* di ordine.

(b) Si dimostri che la relazione $\lhd\!\rhd \;:=\; \lhd \cap \rhd \;=\; \lhd \cap \lhd^{-1}$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{V}_I$.

(c) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\left| \mathbb{V}_I \big/ \lhd\!\rhd \right|$.

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di $\lhd\!\rhd$–equivalenza $[BARO]_{\lhd\!\rhd}$, $[FARO]_{\lhd\!\rhd}$, $[ALTO]_{\lhd\!\rhd}$ e $[TORI]_{\lhd\!\rhd}$.

16 — Sia E un insieme, e $\mathcal{P}(E)$ il suo insieme delle parti. Consideriamo in $\mathcal{P}(E)$ la relazione η così definita:

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E) \qquad A\,\eta\,B \;\overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}\; \left\{ \begin{array}{c} A = B \quad \text{e} \quad |A| = |B| \leq 1 \\ \text{oppure} \\ \exists\;\, Z \in \mathcal{P}(E) \;\; \text{t.c.} \;\; |A \cap Z\,| = 2 = |Z \cap B| \end{array} \right.$$

(a) Dimostrare che η è una relazione di equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di η.

17 — Si considerino gli insiemi $E := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, $E_+ := \{\sharp, \flat, \spadesuit\}$, $E^\circ := E \cup E_+$. Si consideri poi la funzione

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}\big(E^\circ\big) \;, \qquad E' \mapsto f\big(E'\big) := E' \cup E_+ \qquad \forall\;\, E' \in \mathcal{P}(E)$$

e sia $\propto$ la relazione in $\mathcal{P}(E)$ definita da

$$E' \propto E'' \;\iff\; f\big(E'\big) \supseteq f\big(E''\big)$$

(a) Dimostrare che la funzione f è <u>non</u> *iniettiva*.

(b) Dimostrare che la funzione f è <u>non</u> *suriettiva*.

(c) Dimostrare che la relazione $\propto$ è *riflessiva* e *transitiva* ma <u>non</u> *antisimmetrica*.

(d) Determinare, se esiste, un elemento $E_\downarrow \in \mathcal{P}(E)$ tale che $E_\downarrow \propto E'$ per ogni $E' \in \mathcal{P}(E)$ — l'analogo di un “minimo” per la relazione (di preordine!) $\propto$.

(e) Determinare, se esiste, un elemento $E^\uparrow \in \mathcal{P}(E)$ tale che $E' \propto E^\uparrow$ per ogni $E' \in \mathcal{P}(E)$ — l'analogo di un “massimo” per la relazione (di preordine!) $\propto$.

18 — Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione ϕ data da

$$n' \phi \, n'' \iff \Big| \big\{ p \in \{2\,,7\} \bigm| p \text{ divide } n' \,\big\} \Big| = \Big| \big\{ q \in \{2\,,7\} \bigm| q \text{ divide } n'' \,\big\} \Big|$$

(a) Dimostrare che ϕ è una relazione di *equivalenza*.

(b) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}_+ \big/ \phi$.

(c) Calcolare le classi di ϕ–equivalenza $[17]_\phi$, $[70]_\phi$, $[84]_\phi$, $[35]_\phi$, $[7]_\phi$ e $[34]_\phi$.

(d) Calcolare tutte le classi di ϕ–equivalenza in $\mathbb{N}_+$.

19 — Sia $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$ l'insieme delle parti dell'insieme $\{S,P,Q,R\}$ e "$\supseteq$" la relazione di "inclusione inversa" in $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$, definita da $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ se e soltanto se $\mathcal{A}$ contiene $\mathcal{B}$ — per ogni $\mathcal{A}\,,\mathcal{B} \in \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$. Sia poi $D_{60} := \big\{\, d \in \mathbb{N} \bigm| d \text{ divide } 60 \,\big\}$ l'insieme dei divisori di 60, e sia "δ" la relazione di divisibilità in D_{60} — cioè la "restrizione" al sottoinsieme D_{60} della usuale relazione di divisibilità in $\mathbb{N}$.

Nell'insieme $\mathbb{E} := \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big) \times D_{60}$ prodotto cartesiano di $\mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big)$ con D_{60} consideriamo la relazione $\preceq$ definita da

$$\big(\mathcal{A}\,,d\,\big) \preceq \big(\mathcal{B}\,,q\,\big) \iff \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B} \;\;,\;\; d\,\delta\,q$$

per ogni $\big(\mathcal{A}\,,d\,\big)\,,\big(\mathcal{B}\,,q\,\big) \in \mathcal{P}\big(\{S,P,Q,R\}\big) \times D_{60} =: \mathbb{E}$.

(a) Dimostrare che la relazione $\preceq$ è un ordine in $\mathbb{E}$.

(b) Dimostrare che la relazione d'ordine $\preceq$ *non* è totale.

20 — Si considerino l'insieme $\mathbb{V}_I := \{\,\text{parole della lingua italiana}\,\}$ e l'insieme di lettere $\Lambda := \{F,C,R\,\}$. Si consideri poi in $\mathbb{V}_I$ la relazione $\rtimes$ definita da

$$\mathcal{P}_1 \rtimes \mathcal{P}_2 \iff \begin{array}{c} \text{“\textit{la parola } } \mathcal{P}_1 \text{ \textit{contiene al più tante lettere}} \\ \text{di } \Lambda \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2\text{”} \end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione $\rtimes$ è un preordine in $\mathbb{V}_I$, ma *non* un ordine.

(b) Si dimostri che la relazione $\bowtie := \rtimes \cap \ltimes = \rtimes \cap \rtimes^{-1}$ è una equivalenza in $\mathbb{V}_I$.

(c) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\Big| \mathbb{V}_I \big/ \bowtie \Big|$.

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di $\bowtie$–equivalenza $[AFTA]_\bowtie$, $[CERO]_\bowtie$, $[SETA]_\bowtie$ e $[RIGO]_\bowtie$.

21 — Dato un numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}_+$, si consideri nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali la relazione $\preccurlyeq_n$ definita da

$$s \preccurlyeq_n c \iff \exists\, d \in \mathbb{N} : (c - s) = d\,n \qquad \big(\, \forall\, s, c \in \mathbb{N}\,\big)$$

(a) Dimostrare che la relazione $\preccurlyeq_n$ non è un'equivalenza.

(b) Dimostrare che la relazione $\preccurlyeq_n$ è un ordine, ma *non* è totale.

22 — Sia E un insieme, e siano η_1 , η_2 due equivalenze in E .

(a) Dimostrare che la relazione $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ in E è una equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ in funzione delle classi di equivalenza di η_1 e di η_2 .

23 — Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione ψ data da

$$n' \,\psi\, n'' \iff \Big|\big\{\, p \in \{3\,,7\} \;\big|\; p \text{ divide } n' \,\big\}\Big| \;=\; \Big|\big\{\, q \in \{3\,,7\} \;\big|\; q \text{ divide } n'' \,\big\}\Big|$$

(a) Dimostrare che ψ è una relazione di equivalenza.

(b) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}_+ \big/ \psi$.

(c) Calcolare le classi di ψ–equivalenza $[17]_\psi$, $[42]_\psi$, $[126]_\psi$, $[15]_\psi$, $[3]_\psi$ e $[77]_\psi$.

(d) Calcolare tutte le classi di ψ–equivalenza in $\mathbb{N}_+$.

24 — Si considerino l'insieme E e i suoi due sottoinsiemi E_+ ed E_- dati da $E := \{S, P, Q, R\}$, $E_+ := \{S, P\}$, $E_- := \{Q, R\}$. Si consideri anche la funzione

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E_+) \ , \quad E' \mapsto f\big(E'\big) := E' \cap E_+ \qquad \forall\; E' \in \mathcal{P}(E)$$

e siano $\multimap$ e $\preccurlyeq$ le due relazioni in $\mathcal{P}(E)$ definite da

$$\begin{aligned} E' \multimap E'' &\iff f\big(E'\big) \subseteq f\big(E''\big) \\ E' \preccurlyeq E'' &\iff \Big(E' \multimap E'' \;\;\&\;\; \big(E' \cap E_-\big) \supseteq \big(E'' \cap E_-\big) \Big) \end{aligned} \qquad \forall\; E', E'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la funzione f è suriettiva.

(b) Dimostrare che la funzione f è *non* iniettiva.

(c) Dimostrare che la relazione $\multimap$ è riflessiva e transitiva ma *non* antisimmetrica.

(d) Dimostrare che la relazione $\preccurlyeq$ è una relazione d'ordine, e tale ordine *non* è totale.

25 — Si considerino l'insieme $\mathbb{V}_I := \{\text{parole della lingua italiana}\}$ e l'insieme di lettere $Y := \{D, N, A\}$. Si consideri poi in $\mathbb{V}_I$ la relazione $\lessdot$ definita da

$$\mathcal{P}_1 \lessdot \mathcal{P}_2 \iff \begin{array}{c}\text{“\textit{la parola} } \mathcal{P}_1 \text{ \textit{contiene al più tante lettere}} \\ \text{di } Y \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2\text{”}\end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione $\lessdot$ è un preordine in $\mathbb{V}_I$, ma *non* un ordine.

(b) Si dimostri che la relazione $\lessdot\!\!\!\gtrdot := \lessdot \cap \gtrdot = \lessdot \cap \lessdot^{-1}$ è una equivalenza in $\mathbb{V}_I$.

(c) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\left| \mathbb{V}_I \big/ \lessdot\!\!\!\gtrdot \right|$.

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di $\lessdot\!\!\!\gtrdot$–equivalenza $[DADO]_{\lessdot\!\!\!\gtrdot}$, $[TUBO]_{\lessdot\!\!\!\gtrdot}$, $[NANO]_{\lessdot\!\!\!\gtrdot}$ e $[ORDE]_{\lessdot\!\!\!\gtrdot}$.

26 — Per ogni $\ell \in \mathbb{N}_+$, sia $\psi(\ell) := \big\{ p \in \mathbb{N}_+ \,\big|\, p \text{ è primo}, p \text{ divide } \ell \big\}$. Sia $\vartriangleleft$ la relazione in $\mathbb{N}_+$ definita così:

$$\ell_1 \vartriangleleft \ell_2 \iff \psi\big(\ell_1\big) \subseteq \psi\big(\ell_2\big) \;, \qquad\qquad \text{per ogni } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}_+ \;.$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\vartriangleleft$ è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione $\vartriangleleft$ non è antisimmetrica;

(c) esiste un $\ell_\downarrow \in \mathbb{N}_+$ tale che $\ell_\downarrow \vartriangleleft \ell$ per ogni $\ell \in \mathbb{N}_+$;

(d) non esiste un $\ell^\uparrow \in \mathbb{N}_+$ tale che $\ell \vartriangleleft \ell^\uparrow$ per ogni $\ell \in \mathbb{N}_+$;

(e) la relazione $\asymp$ in $\mathbb{N}_+$ definita da $\ell_1 \asymp \ell_2 \iff \big(\ell_1 \vartriangleleft \ell_2\big) \wedge \big(\ell_2 \vartriangleleft \ell_1\big)$ è un'equivalenza.

27 — Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione η data da

$$n' \,\eta\, n'' \iff \Big|\big\{ p \in \{2\,,3\} \;\big|\; p \text{ divide } n' \big\}\Big| = \Big|\big\{ q \in \{2\,,3\} \;\big|\; q \text{ divide } n'' \big\}\Big|$$

(a) Dimostrare che η è una relazione di *equivalenza*.

(b) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}_+ \big/ \eta$.

(c) Calcolare le classi di η–equivalenza $[23]_\eta$, $[66]_\eta$, $[60]_\eta$, $[22]_\eta$, $[2]_\eta$ e $[39]_\eta$.

(d) Calcolare tutte le classi di η–equivalenza in $\mathbb{N}_+$.

28 — Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione σ data da

$$h \,\sigma\, k \iff \exists\, n \in \mathbb{N}_+ \,:\, h \cdot k = n^2 \qquad\qquad \text{per ogni} \quad h\,,k \in \mathbb{N}_+$$

(a) Dimostrare che σ è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{N}_+$.

(b) Descrivere esplicitamente la classe $[1]_\sigma$ di σ–equivalenza di 1.

29 — Si considerino l'insieme X e i suoi due sottoinsiemi X_+ ed X_- dati da $X := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, $X_+ := \{\heartsuit, \spadesuit\}$, $X_- := \{\clubsuit, \diamondsuit\}$. Si considerino poi la funzione

$$h : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X_+) \;\; , \quad X' \mapsto h\big(X'\big) := X' \cap X_+ \qquad \forall\; X' \in \mathcal{P}(X)$$

e le due relazioni $\propto$ e $\trianglelefteq$ in $\mathcal{P}(E)$ definite da

$$\left.\begin{aligned} X' \propto X'' \;\; &\Longleftrightarrow \;\; h\big(X'\big) \supseteq h\big(X''\big) \\ X' \trianglelefteq X'' \;\; &\Longleftrightarrow \;\; \Big(X' \propto X'' \;\; \& \;\; \big(X' \cap X_-\big) \subseteq \big(X'' \cap X_-\big) \Big) \end{aligned}\right. \qquad \forall\; X', X'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la funzione h è *non* iniettiva.

(b) Dimostrare che la funzione h è suriettiva.

(c) Dimostrare che la relazione $\propto$ è riflessiva e transitiva ma *non* antisimmetrica.

(d) Dimostrare che la relazione $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine, e tale ordine *non* è totale.

30 — Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ sia $D_{\scriptscriptstyle P}(n)$ l'insieme di tutti i primi che dividono n . Si consideri poi in $\mathbb{N}_+$ la relazione binaria $\multimap$ così definita:

$$n' \multimap n'' \qquad \Longleftrightarrow \qquad D_{\scriptscriptstyle P}\big(n'\big) \;\subseteq\; D_{\scriptscriptstyle P}\big(n''\big) \qquad\qquad \text{per ogni} \quad n', n'' \in \mathbb{N}_+$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\multimap$ non è simmetrica;

(b) la relazione $\multimap$ non è antisimmetrica;

(c) la relazione $\multimap$ è riflessiva e transitiva (in breve, è un *preordine*);

(d) esiste uno ed un solo elemento $n_- \in \mathbb{N}_+$ tale che $n_- \multimap n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$;

(e) non esiste alcun elemento $n_+ \in \mathbb{N}_+$ tale che $n \multimap n_+$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$.

31 — Sia E un insieme, Π_E l'insieme delle partizioni di E , e $\mathcal{E}_E$ l'insieme delle equivalenze in E . Sia poi $\boldsymbol{e} : \Pi_E \longrightarrow \mathcal{E}_E \; \big(\pi \mapsto \eta_\pi \big)$ l'usuale funzione che associa ad ogni partizione π l'equivalenza η_π da essa canonicamente definita, e sia $\boldsymbol{p} : \mathcal{E}_E \longrightarrow \Pi_E \; \big(\eta \mapsto \pi_\eta \big)$ l'usuale funzione che associa ad ogni equivalenza η la partizione $\pi_\eta := \big\{ [e]_\eta \big\}_{e \in E}$ di E in classi di η–equivalenza. Consideriamo in Π_E la relazione $\preceq$ definita da

$$\forall\; \pi' , \pi'' \;\in\; \Pi_E \;\;\; , \qquad \text{con} \qquad \pi' = \big\{ E'_i \big\}_{i \in I} \;\; , \quad \pi'' = \big\{ E''_j \big\}_{j \in J}$$

$$\pi' \preceq \pi'' \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\;\; i \in I \,,\; \exists\; j \in J \;\; : \;\; E'_i \subseteq E''_j$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\preceq$ è un ordine;

(b) la relazione d'ordine $\preceq$ è totale $\iff$ $\big|E\big| \leq 2$;

(c) $\pi' \preceq \pi'' \implies \eta_{\pi'} \subseteq \eta_{\pi''}$, $\forall\; \pi', \pi'' \in \Pi_E$;

(d) $\eta' \subseteq \eta'' \implies \pi_{\eta'} \preceq \pi_{\eta''}$, $\forall\; \eta', \eta'' \in \mathcal{E}_E$.

32 — Dato l'insieme $\mathbb{S} := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, sia $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}} := \big\{ f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,\big|\, f \text{ è funzione} \big\}$ l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{S}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si consideri in $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$ la relazione $\dashv$ data da

$$f' \dashv f'' \iff \big(f'(\diamondsuit) \supseteq f''(\diamondsuit)\big) \;\&\; \big(f'(\clubsuit) \subseteq f''(\clubsuit)\big) \;, \quad \text{per ogni } f', f'' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}} .$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\dashv$ è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione $\dashv$ non è antisimmetrica;

(c) esistono elementi $f_- \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$ tali che $f_- \dashv f$ per ogni $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$;

(d) esistono elementi $f_+ \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$ tali che $f \dashv f_+$ per ogni $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$.

33 — Si consideri l'insieme $\mathbb{E} := \{\star, \diamond, \bullet\}$ e il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{E})$; si considerino poi in $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ le due relazioni $\propto$ e ϑ definite da

$$\begin{aligned} E' \propto E'' &\iff \Big(\big|E'\big| \gneqq \big|E''\big| \ \text{ oppure } \ E' = E'' \Big) \\ E' \,\vartheta\, E'' &\iff \big|E'\big| = \big|E''\big| \end{aligned} \qquad \forall\; E', E'' \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$$

(a) Dimostrare che la relazione ϑ è una equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di ϑ.

(c) Dimostrare che la relazione $\propto$ è una relazione d'ordine, ma *non* è totale.

34 — *Costruzione dei numeri reali* — Si consideri l'insieme

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} := \big\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \big\} = \big\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,\big|\, a_n \in \mathbb{Q} \,,\, \forall\, n \in \mathbb{N} \big\}$$

di tutte le successioni di numeri razionali. Per una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, diremo che

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *infinitesima* se $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \,,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \ \ \forall\, n > n_\varepsilon$;

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *di Cauchy* se $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \,,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \ \ \forall\, n, m > n_\varepsilon$;

Sia $SC_{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}} := \big\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \,\big|\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è di Cauchy} \big\}$, e consideriamo in $SC_{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}$ la relazione $\simeq$ data — per ogni $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in SC_{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}$ — da

$$\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \simeq \{a''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \iff \{a'_n - a''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è infinitesima}$$

(a) Dimostrare che la relazione $\simeq$ è una equivalenza.

(b) Determinare una biiezione esplicita dall'insieme quoziente $SC_{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}\Big/\simeq$ all'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.