ESERCIZI sulle RELAZIONI - 1

— Fabio GAVARINI —

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Sia S l'insieme degli stati della Terra, e sia κ la relazione di "confinanza" in S, data da

$$s_1 \kappa s_2 \overset{\Delta}{\iff} s_1 \textit{ confina con } s_2 \qquad \forall\ s_1, s_2 \in S$$

dove "confina con" significa "ha un parte non vuota dei suoi confini (per terra o per mare) in comune con".

Verificare che la relazione di confinanza è *riflessiva* e *simmetrica*, ma *non transitiva*.

2 — Sia M l'insieme delle montagne della Terra, e sia $\succ$ la relazione in S, data da

$$m_1 \succ m_2 \overset{\Delta}{\iff} m_1 \textit{ è più alta di } m_2 \qquad \forall\ m_1, m_2 \in M \quad .$$

Verificare che la relazione $\succ$ è *transitiva*, ma *non riflessiva*, *né simmetrica*, *né antisimmetrica*.

3 — Sia M l'insieme delle montagne della Terra, e sia $\succeq$ la relazione in S, data da

$$m_1 \succeq m_2 \overset{\Delta}{\iff} m_1 \textit{ è alta almeno quanto } m_2 \qquad \forall\ m_1, m_2 \in M \quad .$$

Verificare che la relazione $\succeq$ è *transitiva* e *riflessiva* — dunque è un *preordine* — ma *non simmetrica*, *né antisimmetrica*.

4 — Sia P l'insieme delle persone viventi (adesso), e sia π la relazione di "parentela" in P, definita da

$$p_1 \, \pi \, p_2 \overset{\Delta}{\iff} p_1 \textit{ ha un antenato in comune con } p_2 \qquad \forall\ p_1, p_2 \in P \quad .$$

Verificare che la relazione π è *riflessiva* e *simmetrica*, ma *non è transitiva*, *né antisimmetrica*.

5 — Sia $\big|$ la relazione di "divisibilità" nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, definita da

$$n' \,\big|\, n'' \overset{\Delta}{\iff} \exists\, d \in \mathbb{N} : dn' = n'' \qquad \forall\, n', n'' \in \mathbb{N} \quad .$$

Dimostrare che $\big|$ è una relazione di *ordine* (cioè è riflessiva, antisimmetrica e transitiva), ma tale ordine è *non totale*, cioè esistono $n', n'' \in \mathbb{N}$ tali che $n' \not|\, n''$ e $n'' \not|\, n'$.

6 — Sia $\big|$ la relazione di "divisibilità" nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, definita da

$$z' \,\big|\, z'' \overset{\Delta}{\iff} \exists\, d \in \mathbb{Z} : dz' = z'' \qquad \forall\ z', z'' \in \mathbb{Z}\ .$$

Dimostrare che $\big|$ è una relazione di *preordine* (cioè è riflessiva e transitiva) ma *non* di ordine (cioè non è anche antisimmetrica).

7 — Dato un insieme X e il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$, consideriamo in $\mathcal{P}(X)$ la relazione $<$ così definita:

$$S < T \quad \overset{\Delta}{\iff} \quad \big(\exists\ T \twoheadrightarrow S\big) \wedge \big(\nexists\ S \twoheadrightarrow T\big)\ , \qquad\qquad \forall\ \ S\,, T \in \mathcal{P}(X)\ .$$

Dimostrare che $<$ è *transitiva* e *non riflessiva*.

8 — Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Sia λ la relazione in $\mathbb{Q}$ definita da

$$n\,\lambda\,m \overset{\Delta}{\iff} n^2 - 3\,m + 7 \;=\; m^2 - 3\,n + 7 \qquad\qquad \forall\ n, m \in \mathbb{Q}\ .$$

Determinare se λ è una relazione di equivalenza. In caso negativo, si spieghi quale/i proprietà di una relazione di equivalenza non è/sono valide per λ; in caso affermativo, si descrivano le classi di equivalenza di λ (come sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$) e l'insieme quoziente $\mathbb{Q}/\lambda$ (cioè si determini una biiezione tra tale insieme quoziente ed un insieme già noto).

9 — Sia data in $\mathbb{N}$ la relazione binaria ρ definita da

$$m\,\rho\,n \overset{\Delta}{\iff} m^2 - n = n^2 - m \qquad\qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ .$$

(a) Dimostrare che ρ è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di ρ e l'insieme quoziente $E\big/\rho$.

10 — Sia $\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $\varphi(z) := z^2 + 3\,z - 7$ $(\forall\ z \in \mathbb{Z})$, e sia $\simeq_\varphi$ la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$ canonicamente indotta da φ. Per ogni $m \in \mathbb{Z}$, determinare (descrivendola esplicitamente) la classe di equivalenza modulo $\simeq_\varphi$ di m.

11 — Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,,\ n \mapsto f(n) := \mathrm{MCD}(n, 15)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\,)\,.$

(a) Calcolare $Im(f)$ e verificare che f non è iniettiva.

(b) Descrivere tutte le classi di equivalenza di $\mathbb{N}$ rispetto alla relazione di equivalenza ρ_f canonicamente associata ad f.

12 — Sia E un insieme e $\mathcal{P}(E)$ il suo insieme delle parti. Dimostrare che:

(a) la relazione di inclusione $\subseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathcal{P}(E)$;

(b) la relazione di "contenimento" $\supseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathcal{P}(E)$;

(c) $\subseteq$ è ordine *totale* $\iff$ $\big|E\big| \leq 1$ $\iff$ $\supseteq$ è ordine *totale*.

13 — Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Nell'insieme $E := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(1,0)\}$ si definisca una relazione μ ponendo $\big($per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(1,0)\}\big)$

$$(x_1, y_1)\ \mu\ (x_2, y_2) \quad \overset{\Delta}{\iff} \quad y_1 x_2 - y_1 + y_2 - x_1 y_2 = 0$$

Determinare se μ è una relazione di equivalenza. In caso negativo, si spieghi quale/i proprietà di una relazione di equivalenza non è/sono valide per μ; in caso affermativo, si descrivano le classi di equivalenza di μ e l'insieme quoziente E/μ.

14 — Dati a, b, $c \in \mathbb{Z}$, sia $\rho_{a,b,c}$ la relazione in $\mathbb{Z}$ definita da

$$x\, \rho_{a,b,c}\, y \overset{\Delta}{\iff} a\,x + b\,y \,=\, c \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{Z}\ .$$

Determinare per quali terne $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ la relazione $\rho_{a,b,c}$ sia simmetrica oppure riflessiva.

15 — *Esempio di dimostrazione sbagliata!*

Sia ρ una relazione (binaria) in un insieme E. Supponiamo che ρ sia *simmetrica* e *transitiva*. Allora, dati x, $y \in E$, abbiamo che

$$x\,\rho\,y \quad \Longrightarrow \quad y\,\rho\,x \qquad\qquad \text{(per la proprietà simmetrica)}$$
$$\Big(\, x\,\rho\,y \;\text{ e }\; y\,\rho\,x \,\Big) \quad \Longrightarrow \quad x\,\rho\,x \qquad\qquad \text{(per la proprietà transitiva)}$$

e *quindi* ρ è *anche riflessiva!!!* ... dov'è l'<u>errore</u>?

16 — Sia ρ una relazione in un insieme E. Verificare che:

(a) ρ è riflessiva $\iff$ $\mathrm{id}_E \subseteq \rho$;

(b) ρ è transitiva $\iff$ $\rho^2 := \rho \circ \rho \subseteq \rho$ $\iff$ $\rho^n \subseteq \rho \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_+$;

(c) ρ è simmetrica $\iff$ $\rho^{-1} \subseteq \rho$ $\iff$ $\rho^{-1} = \rho$;

(d) ρ è antisimmetrica $\iff$ $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_E$.

17 — Sia ρ e σ due relazioni in un insieme E. Dimostrare che:

$$\rho \cap \sigma \ \text{ è riflessiva } \iff \rho \text{ e } \sigma \text{ sono riflessive.}$$

18 — Sia ρ una relazione in un insieme E. Dimostrare che:

(a) se ρ è riflessiva, risp. transitiva, risp. antisimmetrica, allora anche ρ^{-1} è riflessiva, risp. transitiva, risp. antisimmetrica;

(b) se ρ è un preordine, allora anche ρ^{-1} è un preordine;

(c) se ρ è un ordine, allora anche ρ^{-1} è un ordine (*Principio di Dualità*);

(d) se ρ è un ordine totale, allora anche ρ^{-1} è un ordine totale.

19 — Dato un insieme E, caratterizzare — tra tutti i sottoinsiemi di $E \times E$ — tutte le relazioni in E che sono simultaneamente simmetriche e antisimmetriche.

20 — Dato un insieme E, dimostrare che l'unica relazione in E che sia simultaneamente un'equivalenza e un ordine è la relazione identità id_E in E.

21 — Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione tra insiemi, e sia ω una relazione in Y, e sia ω_f la relazione in X definita da

$$x' \, \omega_f \, x'' \iff^{\Delta} f(x') \, \omega \, f(x'') \qquad \text{per ogni } \; x', x'' \in X \; .$$

Dimostrare che valgono le seguenti implicazioni tra proprietà di ω e proprietà di ω_f :

(a) se ω è riflessiva (in Y), allora anche ω_f è riflessiva (in X);

(b) se ω è simmetrica (in Y), allora anche ω_f è simmetrica (in X);

(c) se ω è transitiva (in Y), allora anche ω_f è transitiva (in X);

(d) se ω è antisimmetrica (in Y), allora ω_f è antisimmetrica (in X) *se e soltanto se* la funzione f è iniettiva.

22 — Sia $E \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ l'insieme dei numeri interi, o dei numeri razionali, o dei numeri reali, e sia α la relazione in E data da

$$e' \, \alpha \, e'' \iff^{\Delta} \big(e' = e'' \text{ oppure } e' = -e'' \big) \qquad \text{per ogni } \; e', e'' \in E \; .$$

Per ciascuno dei tre casi ($E = \mathbb{Z}$, oppure $E = \mathbb{Q}$, oppure $E = \mathbb{R}$),

(a) dimostrare che α è un'equivalenza in E,

(b) descrivere esplicitamente ciascuna classe di α–equivalenza in E,

(c) descrivere esplicitamente l'insieme quoziente $E\big/\alpha$.

23 — Sia $\vdash$ una relazione in un insieme $E \neq \emptyset$ che sia un "preordine", cioè sia riflessiva e transitiva.

(a) Dimostrare che la relazione $\sigma_\vdash := \vdash \cap \vdash^{-1}$ in E, descritta esplicitamente da

$$a \, \sigma_\vdash \, b \iff^{\Delta} (\, a \vdash b \,) \wedge (\, b \vdash a \,) \;, \qquad \forall \, a, b \in E$$

è un'equivalenza in E .

(b) Descrivere esplicitamente le singole classi di equivalenza di $\sigma_\vdash$.

(c) Dimostrare che nell'insieme quoziente $E\big/\sigma_\vdash$ esiste una ben definita relazione $\overline{\vdash}$ data da

$$[\, a \,]_{\sigma_\vdash} \, \overline{\vdash} \, [\, b \,]_{\sigma_\vdash} \iff^{\Delta} a \vdash b \;, \qquad \forall \, a, b \in E$$

(*N.B.:* si tratta soltanto di dimostrare che la definizione di $\overline{\vdash}$ sia *ben posta*).

(d) Dimostrare che la relazione $\overline{\vdash}$ nell'insieme quoziente $E\big/\sigma_\vdash$ definita in *(c)* è una relazione d'ordine.

24 — Applicare l'esercizo 23 qui sopra al caso specifico in cui $E := \mathbb{Z}$ e $\vdash := \big|$ (la relazione di "divisibilità" in $\mathbb{Z}$).

25 — Un insieme ordinato $\big(A\,, \leq_A\big)$ si dice *simile* ad un insieme ordinato $\big(B\,, \leq_B\big)$ se esiste una applicazione bijettiva $f : A \longrightarrow B$ tale che per ogni a', $a'' \in A$ si abbia

$$a' \leq_A a'' \iff f\big(a'\big) \preceq_B f\big(a''\big) \quad .$$

(a) Dimostrare che la relazione di "similitudine" tra insiemi ordinati è una relazione di equivalenza.

(b) Stabilire se $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, dotati dell'ordinamento naturale, siano simili oppure no.

(c) Stabilire se $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, dotati dell'ordinamento naturale, siano simili oppure no.

(d) Stabilire se $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, dotati dell'ordinamento naturale, siano simili oppure no.

26 — Si considerino l'insieme $\mathbb{V}_I := \{\,\text{parole della lingua italiana}\,\}$ e l'insieme di lettere $Y := \{D, N, A\}$. Si consideri poi in $\mathbb{V}_I$ la relazione $\lessdot$ definita da

$$\mathcal{P}_1 \lessdot \mathcal{P}_2 \iff \begin{array}{c} \text{“\textit{la parola} } \mathcal{P}_1 \text{ \textit{contiene al più tante lettere}} \\ \text{di } Y \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2\text{”} \end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza molteplicità*).

(a) Si dimostri che la relazione $\lessdot$ è un preordine in $\mathbb{V}_I$, ma *non* un ordine.

(b) Si dimostri che la relazione $\lessdot\!\!\gtrdot \; := \; \lessdot \cap \gtrdot \; = \; \lessdot \cap \lessdot^{-1}$ è una equivalenza in $\mathbb{V}_I$.

(c) Determinare il numero di elementi dell'insieme quoziente $\left|\, \mathbb{V}_I \big/ \lessdot\!\!\gtrdot \,\right|$.

(d) Descrivere esplicitamente le quattro classi di $\lessdot\!\!\gtrdot$–equivalenza $[DADO]_{\lessdot\!\!\gtrdot}$, $[TUBO]_{\lessdot\!\!\gtrdot}$, $[NANO]_{\lessdot\!\!\gtrdot}$ e $[ORDE]_{\lessdot\!\!\gtrdot}$.

27 — Sia E un insieme, e $\mathcal{P}(E)$ il suo insieme delle parti. Consideriamo in $\mathcal{P}(E)$ le relazioni λ e λ^* così definite:

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E) \qquad A\,\lambda\,B \overset{\text{DEF}}{\iff} A = B \ \text{ oppure } \ \big|A \cap B\big| = 2$$

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E) \qquad A\,\lambda^*\,B \overset{\text{DEF}}{\iff} \begin{cases} \exists\, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{P}(E) \text{ t.c.} \\ A = X_1\,,\ X_n = B\,,\ X_i\,\lambda\,X_{i+1} \quad \forall\, i < n\,. \end{cases}$$

(in particolare, λ^* è la *chiusura transitiva* di λ).

(a) Dimostrare che la relazione λ è riflessiva e simmetrica.

(b) Dimostrare che λ^* è una relazione di equivalenza.

(c) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di λ^*.