

ESERCIZI SUI
NUMERI INTERI

N.B.: il simbolo $\hat{\otimes}$ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

NOTA: si assumono note tutte le proprietà fondamentali di un Sistema di Numeri Naturali, il cui insieme sia indicato con $\mathbb{N}$, relativamente a somma, prodotto e ordine.

— * —

1 — Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $a \leq b$, esiste

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a \leq b, \quad \exists! c \in \mathbb{N} : c + a = b$$

cioè $\forall a, b \in \mathbb{N}$ con $a \leq b$ esiste una e una sola soluzione dell'equazione $\otimes_{a,b} : x + a = b$.

Suggerimento: Si proceda per induzione (debole) su b .

2 — Sia data in $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione binaria η definita da

$$(b', a') \eta (b'', a'') \iff a' + b'' = a'' + b' \quad \forall (b', a'), (b'', a'') \in \mathbb{N}^2.$$

(a) Dimostrare che η è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di η .

(c) Dimostrare che in ogni classe di equivalenza di η esiste uno e un solo rappresentante della forma $(n, 0)$ oppure $(0, n)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Suggerimento: Per la parte (a), si ricordi che l'operazione $+$ in $\mathbb{N}$ è commutativa e cancellativa. Per la parte (b), si cominci descrivendo la classe di η -equivalenza di $(0, 0)$. Per la parte (c), si sfrutti il risultato dell'esercizio **1** qui sopra.

3 — Si considerino in $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le operazioni binarie “ $+$ ” e “ $\cdot$ ” definite da
 $(b_1, a_1) + (b_2, a_2) := (b_1 + b_2, a_1 + a_2)$, $(b_1, a_1) \cdot (b_2, a_2) := (b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)$
per ogni $(b_1, a_1), (b_2, a_2) \in \mathbb{N}^2$. Dimostrare che:

(a) le operazioni $+$ e $\cdot$ sono entrambe commutative;

(b) le operazioni $+$ e $\cdot$ sono entrambe associative;

(c) la coppia $(0, 0)$ è elemento neutro per l'operazione $+$;

(d) la coppia $(1, 0)$ è elemento neutro per l'operazione $\cdot$;

(e) l'operazione $\cdot$ è distributiva (a destra e a sinistra) rispetto all'operazione $+$.

Suggerimento: Sono tutte verifiche brutali, basta fare dei conti elementari...

4 — Si considerino in $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le operazioni binarie “+” e “·” definite da

$$(b_1, a_1) + (b_2, a_2) := (b_1 + b_2, a_1 + a_2), \quad (b_1, a_1) \cdot (b_2, a_2) := (b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)$$

per ogni $(b_1, a_1), (b_2, a_2) \in \mathbb{N}^2$. Dimostrare che la relazione di equivalenza η in $\mathbb{N}^2$ definita nell’esercizio **2** qui sopra è *compatibile* con entrambe le operazioni + e ·, cioè

$$\begin{aligned} (b'_1, a'_1) \eta (b''_1, a''_1), (b'_2, a'_2) \eta (b''_2, a''_2) &\implies ((b'_1, a'_1) + (b'_2, a'_2)) \eta ((b''_1, a''_1) + (b''_2, a''_2)) \\ (b'_1, a'_1) \eta (b''_1, a''_1), (b'_2, a'_2) \eta (b''_2, a''_2) &\implies ((b'_1, a'_1) \cdot (b'_2, a'_2)) \eta ((b''_1, a''_1) \cdot (b''_2, a''_2)) \end{aligned}$$

Suggerimento: È una verifica elementare, basta fare dei conti meccanici...

5 — Nell’insieme quoziente $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \eta$ si utilizzi la notazione $\overline{(b, a)} := [(b, a)]_\eta$ per indicare la classe di η -equivalenza di $(b, a) \in \mathbb{N}^2$. Si considerino poi in $\mathbb{Z}$ le operazioni + e · definite — per ogni $(b_1, a_1), (b_2, a_2) \in \mathbb{N}^2$ — da

$$\begin{aligned} \overline{(b_1, a_1)} + \overline{(b_2, a_2)} &:= \overline{(b_1, a_1) + (b_2, a_2)} & \left(= \overline{(b_1 + b_2, a_1 + a_2)} \right) \\ \overline{(b_1, a_1)} \cdot \overline{(b_2, a_2)} &:= \overline{(b_1, a_1) \cdot (b_2, a_2)} & \left(= \overline{(b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)} \right) \end{aligned}$$

Dimostrare che:

- (+ . C) l’operazione + è commutativa;
- (+ . A) l’operazione + è associativa;
- (+ . N) esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento neutro per l’operazione +, precisamente $0 := \overline{(0, 0)}$;
- (+ . I) per ogni $z \in \mathbb{Z}$, esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento inverso (o “opposto”) di z per l’operazione +, precisamente $-z := \overline{(a, b)}$ se $z = \overline{(b, a)}$;
- (· . C) l’operazione · è commutativa;
- (· . A) l’operazione · è associativa;
- (· . N) esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento neutro per l’operazione ·, precisamente $1 := \overline{(1, 0)}$;
- (· . Z) per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, si ha $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ oppure $y = 0$
(in breve, “ $\mathbb{Z}$ è privo di divisori di zero”);
- (· | +) l’operazione · è distributiva (a destra e a sinistra) rispetto all’operazione +.

Suggerimento: Sono tutte verifiche dirette, che si ottengono come diretta conseguenza di analoghe proprietà delle operazioni + e · in $\mathbb{N}^2$ e/o delle operazioni + e · in $\mathbb{N}$.

6 — Nell'insieme quoziente $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \eta$ — con la notazione $\overline{(b, a)} := [(b, a)]_\eta$ per indicarne gli elementi — si considerino le operazioni $+$ e $\cdot$ definite nell'esercizio **5** qui sopra, e i sottoinsiemi

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_+ &:= \left\{ \overline{(b, a)} \mid (b, a) \in \mathbb{N}^2, b \geq a \right\} & \left(= \{ \text{interi positivi} \} \right) \\ \mathbb{Z}_- &:= \left\{ \overline{(b, a)} \mid (b, a) \in \mathbb{N}^2, b \leq a \right\} & \left(= \{ \text{interi negativi} \} \right)\end{aligned}$$

- (a) Dimostrare che $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \amalg \{ \overline{(0, 0)} \} \amalg \mathbb{Z}_-$;
 (b) Dimostrare che $\mathbb{Z}_+ + \mathbb{Z}_+ \subsetneq \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_- + \mathbb{Z}_- \subsetneq \mathbb{Z}_-$;
 (c) Dimostrare che $\mathbb{Z}_+ \cdot \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_- \cdot \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_- \cdot \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_+ \cdot \mathbb{Z}_-$.
 (d) Dimostrare che le due funzioni $j_+ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $j_- : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definite da $j_+(n) := \overline{(n, 0)}$ e $j_-(n) := \overline{(0, n)}$ sono entrambe iniettive, e che $j_\pm(\mathbb{N}_+) = \mathbb{Z}_\pm$.
 (e) Verificare che per ogni $z \in \mathbb{Z}$ esistono $b, a \in \mathbb{N}$ tali che $z = j_+(b) + j_-(a)$.

7  — Si consideri in $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione $\preceq_\times$ definita da

$$(b_1, a_1) \preceq_\times (b_2, a_2) \iff (b_1 + a_2) \leq (b_2 + a_1)$$

per ogni $(b_1, a_1), (b_2, a_2) \in \mathbb{N}^2$ — dove “ $\leq$ ” indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

- (a) Dimostrare che $\preceq_\times$ è una relazione di preordine;
 (b) Dimostrare che $\preceq_\times \cap \preceq_\times^{-1} = \eta$;
 (c) Dimostrare che $\preceq_\times \cup \preceq_\times^{-1} = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$;
 (d) Dedurre da (a) e (b) che η è un'equivalenza.

Suggerimento: Per (a), la riflessività è immediata; la transitività segue dal fatto che la somma in $\mathbb{N}$ sia commutativa e cancellativa, e dal fatto che la relazione d'ordine $\leq$ in $\mathbb{N}$ sia compatibile con la somma, cioè $x \leq y \iff x + z \leq y + z$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{N}$. La (b) segue direttamente dalle definizioni. La (c) segue dal fatto che l'ordine in $\mathbb{N}$ è totale.

8  — Si consideri in $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione $\preceq_\times$ definita da

$$(b_1, a_1) \preceq_\times (b_2, a_2) \iff (b_1 + a_2) \leq (b_2 + a_1)$$

per ogni $(b_1, a_1), (b_2, a_2) \in \mathbb{N}^2$ — dove sulla destra con “ $\leq$ ” indichiamo la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$. Dimostrare che la relazione di equivalenza η in $\mathbb{N}^2$ definita nell'esercizio **2** qui sopra è compatibile con la relazione $\preceq_\times$, cioè

$$\begin{array}{ccc} (b'_1, a'_1) \eta (b''_1, a''_1) & & ((b'_1, a'_1) + (b'_2, a'_2)) \\ \& & \Downarrow \\ (b'_2, a'_2) \eta (b''_2, a''_2) & \implies & ((b'_1, a'_1) + (b'_2, a'_2)) \end{array}$$

Suggerimento: È una verifica diretta: bisogna sfruttare il fatto che la somma in $\mathbb{N}$ sia commutativa e cancellativa, e il fatto che la relazione d'ordine $\leq$ in $\mathbb{N}$ sia compatibile con la somma, cioè $x \leq y \iff x+z \leq y+z$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{N}$. È soltanto un po' lungo fare i calcoli... OPPURE, più direttamente segue subito dalla identità $\preceq_{\times} \cap \preceq_{\times}^{-1} = \eta$ nell'esercizio 7 qui sopra.

9 — Nell'insieme quoziente $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \eta$ — con la notazione $\overline{(b, a)} := [(b, a)]_{\eta}$ — si consideri la relazione $\leq$ definita — per ogni $\overline{(b_1, a_1)}, \overline{(b_2, a_2)} \in \mathbb{Z}^2$ — da

$$\overline{(b_1, a_1)} \leq \overline{(b_2, a_2)} \iff (b_1, a_1) \preceq_{\times} (b_2, a_2) \quad \left(\iff (b_1 + a_2) \leq (b_2 + a_1) \right)$$

Dimostrare che tale $\leq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{Z}$, e tale ordine è totale.

Suggerimento: È una verifica diretta: che $\leq$ sia un ordine segue direttamente dal fatto che la relazione $\preceq_{\times}$ è un preordine in $\mathbb{N}^2$, e inoltre la relazione η è compatibile con la relazione $\preceq_{\times}$; che poi tale ordine sia totale segue dal fatto che $\preceq_{\times} \cup \preceq_{\times}^{-1} = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$.

10 — Si consideri la funzione “valore assoluto” $|\cdot| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$|\overline{(b, a)}| := \begin{cases} b - a, & \text{se } b \geq a \\ 0, & \text{se } b = a \\ a - b, & \text{se } b \leq a \end{cases}$$

cioè, con la notazione degli esercizi 5 e 6 qui sopra, $|z| := \begin{cases} z, & \text{se } z \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & \text{se } z = 0 := \overline{(0, 0)} \\ -z, & \text{se } z \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$

Dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha:

- (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

11 — Sia $\delta_{\mathbb{Z}}$ la relazione di “divisibilità” nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi — denotata più semplicemente con “ $|$ ” quando non ci sia ambiguità — definita da

$$z' \delta_{\mathbb{Z}} z'' \iff \exists d \in \mathbb{Z} : d z' = z'' \quad (\forall z', z'' \in \mathbb{Z})$$

Dimostrare che $\delta_{\mathbb{Z}}$ è una relazione di *preordine* (cioè è riflessiva e transitiva) ma *non* di ordine (cioè non è anche antisimmetrica).

12 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $U(\mathbb{Z}) := \{\varepsilon \in \mathbb{Z} \mid \exists \eta \in \mathbb{Z} : \varepsilon \eta = 1\}$ l'insieme dei numeri interi *invertibili*. Dimostrare che:

- (a) $1 \in U(\mathbb{Z})$;
- (b) $U(\mathbb{Z}) \cdot U(\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z})$, dove $U(\mathbb{Z}) \cdot U(\mathbb{Z}) := \{\varepsilon' \cdot \varepsilon'' \mid \varepsilon', \varepsilon'' \in U(\mathbb{Z})\}$;
- (c) se $\varepsilon \in U(\mathbb{Z})$ con $\varepsilon \eta = 1$ (con $\eta \in \mathbb{Z}$), allora $\eta \in U(\mathbb{Z})$.

13 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $U(\mathbb{Z}) := \{ \varepsilon \in \mathbb{Z} \mid \exists \eta \in \mathbb{Z} : \varepsilon \eta = 1 \}$ l'insieme dei numeri interi *invertibili*, e si consideri la relazione $\sim$ definita da

$$z' \sim z'' \iff \exists \varepsilon \in U(\mathbb{Z}) : z' = \varepsilon z'' \quad (\forall z', z'' \in \mathbb{Z})$$

(a) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di *equivalenza*.

(b) Dimostrare che $\sim = \delta_{\mathbb{Z}} \cap \delta_{\mathbb{Z}}^{-1}$, dove $\delta_{\mathbb{Z}}$ è la relazione di divisibilità introdotta nell'esercizio **11** qui sopra.

Suggerimento: È tutto una verifica diretta: per la parte (b), si sfrutti il fatto che $\mathbb{Z}$ è privo di divisori di zero per dimostrare l'inclusione " $\supseteq$ " (l'altra segue dalle definizioni).

14 — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sia $U(\mathbb{Z}) := \{ \varepsilon \in \mathbb{Z} \mid \exists \eta \in \mathbb{Z} : \varepsilon \eta = 1 \}$ l'insieme dei numeri interi *invertibili*. Dimostrare che $U(\mathbb{Z}) = \{+1, -1\}$.

Suggerimento: Utilizzare la proprietà $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ — per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ — insieme al fatto che il solo numero naturale $n \in \mathbb{N}$ che sia invertibile (in $\mathbb{N}$) è $n = 1$.
