ESERCIZI sugli INSIEMI

— Fabio GAVARINI —

1 — Si considerino i seguenti insiemi

$$A := \{\,\text{animali}\,\}\ ,\quad B := \{\,\text{oggetti inanimati}\,\}\ ,\quad C := \{\,\text{pesci}\,\}$$
$$D := \{\,\text{pinguini}\,\}\ ,\quad E := \{\,\text{animali volanti}\,\}\ ,\quad F := \{\,\text{sassi}\,\}$$
$$G := \{\,\text{piante}\,\}\ ,\quad H := \{\,\text{pipistrelli}\,\}\ ,\quad I := \{\,\text{struzzi}\,\}$$
$$J := \{\,\text{ciottoli}\,\}\ ,\quad K := \{\,\text{uccelli}\,\}\ ,\quad L := \{\,\text{mosche}\,\}$$

(a) Determinare le coppie di insiemi X, Y tra quelli su elencati per i quali $X \subseteq Y$.

(b) Determinare le coppie di insiemi X, Y tra quelli su elencati per i quali $Y \subseteq X$.

(c) Determinare le coppie di insiemi X, Y tra quelli su elencati per i quali $X \cap Y = \emptyset$.

(d) Determinare le coppie di insiemi X, Y tra quelli su elencati per i quali $X \cap Y \neq \emptyset$.

(e) Determinare le coppie di insiemi X, Y tra quelli su elencati per i quali si abbia $X \setminus Y \neq \emptyset$ e $Y \setminus X \neq \emptyset$.

2 — Si consideri l'insieme $\mathbb{A} := \{a,b,c,d,e,f,g\}$ e i suoi tre sottoinsiemi

$$G := \{a,c,e\} \quad , \qquad H := \{b,f\} \quad , \qquad K := \{a,b,d,f,g\}$$

e utilizziamo la notazione $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(S)$ per indicare il *complementare* in $\mathbb{A}$ di un qualsiasi sottoinsieme S di $\mathbb{A}$.

(a) Calcolare esplicitamente il sottoinsieme $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}\big(H \cup \mathcal{C}_{\mathbb{A}}(K)\big) \setminus G$.

(b) Calcolare esplicitamente il sottoinsieme $\mathbb{A} \setminus \Big(\mathcal{C}_{\mathbb{A}}\big(K \cap \mathcal{C}_{\mathbb{A}}(H)\big) \cup G\Big)$.

(c) Verificare (tramite confronto diretto) che

$$\mathcal{C}_{\mathbb{A}}\big(H \cup \mathcal{C}_{\mathbb{A}}(K)\big) \setminus G \;=\; \mathbb{A} \setminus \Big(\mathcal{C}_{\mathbb{A}}\big(K \cap \mathcal{C}_{\mathbb{A}}(H)\big) \cup G\Big)$$

3 — Dati tre insiemi qualsiasi X, Y e Z, dimostrare che:

(a) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ e $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$, cioè le operazioni $\cup$ e $\cap$ godono della proprietà *associativa*;

(b) $X \cup Y = Y \cup X$ e $X \cap Y = Y \cap X$, cioè le operazioni $\cup$ e $\cap$ godono della proprietà *commutativa*;

(c) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ e $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$, cioè l'operazione $\cup$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all'operazione $\cap$;

(d) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ e $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$, cioè l'operazione $\cap$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all'operazione $\cup$;

(e) $X \cap (X \cup Y) = X$ e $X \cup (X \cap Y) = X$ — le cosiddette "leggi di assorbimento".

4 — Dimostrare, trovando controesempi espliciti, che se X, Y e Z sono insiemi in generale si ha che

$$X \cup Y = X \cup Z \;\not\Longrightarrow\; Y = Z \quad , \qquad X \cap Y = X \cap Z \;\not\Longrightarrow\; Y = Z$$

In altre parole, si trovino esempi di insiemi X', Y', Z' e di insiemi X'', Y'', Z'' tali che

$$X' \cup Y' = X' \cup Z' \quad \text{e} \quad Y' \neq Z' \quad , \qquad X'' \cap Y'' = X'' \cap Z'' \quad \text{e} \quad Y'' \neq Z''$$

5 — Dati due insiemi qualsiasi X e Y, dimostrare che:

(a) $\quad X \cap Y = X \iff X \subseteq Y \iff X \cup Y = Y \quad ;$

(b) $\quad X \setminus Y = X \cap \mathcal{C}_{X \cup Y}(Y) \quad .$

6 — Dati tre insiemi qualsiasi A, B e C, dimostrare che:

(a) se $A \subseteq B$, allora $B \setminus (B \setminus A) = A$;

(b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$;

(c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = B \iff A = \emptyset$;

(d) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ e $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ — sono le cosiddette “leggi di De Morgan”;

(e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ e $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$, cioè l’operazione $\cap$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all’operazione $\setminus$.

7 — Dati tre insiemi qualsiasi X, Y e Z, dimostrare che:

(a) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;

(b) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$;

(c) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$.

8 — Dati tre insiemi qualsiasi A, B e C, dimostrare che:

(a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; l’insieme così ottenuto si indica con $A \triangle B$, e si dice *“differenza simmetrica” di A con B*;

(b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, cioè l’operazione $\triangle$ gode della proprietà *associativa* (*suggerimento:* si faccia uso dei risultati dell’Esercizio 6 qui sopra);

(c) $A \triangle B = B \triangle A$, cioè l’operazione $\triangle$ gode della proprietà *commutativa*;

(d) $A \triangle \emptyset = A$, $\emptyset \triangle A = A$;

(e) $A \triangle A = \emptyset$;

(f) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ e $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$, cioè l’operazione $\cap$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all’operazione $\triangle$.

9 — Dati tre insiemi A, B e K con $K \neq \emptyset$ dimostrare che:

(a) $K \times A = K \times B \implies A = B$, cioè l'operazione $\times$ è *cancellativa a sinistra*;

(b) $A \times K = B \times K \implies A = B$, cioè l'operazione $\times$ è *cancellativa a destra*.

10 — Dati tre insiemi qualsiasi A, B e C, dimostrare che:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ e $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, cioè l'operazione $\times$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all'operazione $\cup$;

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ e $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, cioè l'operazione $\times$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all'operazione $\cap$;

(c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ e $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$, cioè l'operazione $\times$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all'operazione $\setminus$.

(d) $A \times \emptyset = \emptyset$ e $\emptyset \times A = \emptyset$.

11 — Calcolare esplicitamente l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ per ciascuno degli insiemi X preso tra i seguenti:

$$A := \{S, P, Q, R\}\,, \quad B := \{\flat\,, \sharp\,, \natural\}\,, \quad C := \{\heartsuit\,, \spadesuit\,, \clubsuit\,, \diamondsuit\}\,, \quad D := \{\star\,, \circ\,, \times\}$$
$$E := \{©\,, ®\}\,, \quad F := \big\{¥\big\}\,, \quad G := \big\{3\,, \emptyset\,, S\big\}\,, \quad H := \emptyset\,, \quad I := \{<\,, >\}\,, \quad J := \big\{\bigstar\big\}$$

12 — Considerati gli insiemi

$$A := \{S, P, Q, R\}\,, \quad B := \{\flat\,, \sharp\,, \natural\}\,, \quad C := \{\heartsuit\,, \spadesuit\,, \clubsuit\,, \diamondsuit\}\,, \quad D := \{\star\,, \circ\,, \times\}$$
$$E := \{©\,, ®\}\,, \quad F := \big\{¥\big\}\,, \quad G := \big\{3\,, \emptyset\,, S\big\}\,, \quad H := \emptyset\,, \quad I := \{<\,, >\}\,, \quad J := \big\{\bigstar\big\}$$

si calcolino esplicitamente i seguenti prodotti cartesiani: $A \times E$, $B \times G$, $F \times C$, $H \times A$, $G \times B$, $C \times J$, $D \times D$, $C \times H$, $F \times B$, $(E \times G) \times I$, $B \times (F \times D)$, $E \times (G \times I)$.

13 — Sia X un insieme, $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Dimostrare che, se X contiene almeno due elementi, allora esistono $X', X'' \in \mathcal{P}(X)$ tali che $X' \nsubseteq X''$ e $X' \nsupseteq X''$.

14 — Dati due insiemi qualsiasi A e B e il loro prodotto cartesiano $A \times B$, siano $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ e $\mathcal{P}\big(A \times B\big)$ i relativi insiemi delle parti. Si definisca poi l'insieme

$$\mathcal{P}_\times(A\,;B) := \Big\{ \big\{ (a,b) \mid a \in A'\,,\, b \in B' \big\} \,\Big|\, A' \subseteq A, B' \subseteq B \Big\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{P}_\times(A;B) \subseteq \mathcal{P}\big(A \times B\big)$.

(b) Dimostrare, tramite un esempio esplicito di specifici insiemi A e B opportunamente scelti, che se A e B hanno entrambi più di un solo elemento, allora $\mathcal{P}_\times(A\,;B) \subsetneqq \mathcal{P}\big(A \times B\big)$, cioè l'inclusione di cui al punto *(a)* *non* è una uguaglianza (è invece una inclusione *stretta*) — *Suggerimento: pensando ad A e B come "rette" e al prodotto $A \times B$ come a un "piano", gli elementi di $\mathcal{P}_\times(A\,;B)$ in tale piano sono "rettangoli" coi lati paralleli agli "assi" A e B .*

15 — Dati due insiemi qualsiasi A e B, dimostrare che:

(a) $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

(b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\big(A \cap B\big)$;

(c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}\big(A \cup B\big)$;

(d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\big(A \cup B\big) \iff \big(A \subseteq B\big)$ oppure $\big(B \subseteq A\big)$.