

ESERCIZI SU
INDUZIONE, SCRITTURA POSIZIONALE

N.B.: il simbolo $\hat{\otimes}$ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

1 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}; \\ (b) \quad \sum_{h=0}^n h^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}; \\ (c) \quad \sum_{t=0}^n t^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) &= n^2 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}; \\ (b) \quad \sum_{h=0}^n (4h+1) &= (2n+1)(n+1) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente identità:

$$\sum_{s=0}^n s(s+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente diseuguaglianza:

$$(n-3)^2 \not\leq n^2 + 11$$

4 — Dimostrare, per induzione su n , che $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è multiplo (intero) di 7 (per ogni $n \in \mathbb{N}$).

5 — Dimostrare, facendo induzione su $n := k - h$, che per ogni $h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $h < k$ vale la seguente catena di diseuguaglianze (strette):

$$h^2 < h k < k^2$$

6 — Siano A un insieme e $\underline{2}^A$ il corrispondente insieme delle funzioni caratteristiche in A . Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\underline{2}^A$ possiede 2^n elementi.

7 $\Leftarrow$ — Sia A un insieme, e sia $\mathcal{P}(A)$ il corrispondente insieme delle parti di A . Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ possiede 2^n elementi.

8 — Sia $n := (9873)_{10}$, cioè n è il numero naturale che in base dieci è espresso dalla scrittura posizionale $n = (9873)_{10}$. Scrivere n in base otto e in base sette.

Soluzione: $n = (23221)_8$, $n = (40533)_7$.

9 — Convertire in base dieci (cioè riscriverli usando la notazione posizionale in base dieci) i numeri n' e n'' espressi da $n' := (7503)_8$ e $n'' := (40213)_5$ rispettivamente in base otto e in base cinque.

Soluzione: $n' = (3907)_{10}$, $n'' = (2558)_{10}$.

10 — Conversioni facili ($b \rightsquigarrow b^r$): Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = (1011000110)_2$. Scrivere n in base quattro.

Soluzione: $n = (23012)_4$.

11 — Conversioni facili ($b \rightsquigarrow b^r$): Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = (11010111011)_2$. Scrivere n in base otto.

Soluzione: $n = (3273)_8$.

12 — Conversioni facili ($b^s \rightsquigarrow b$): Sia n il numero naturale che in base quattro è espresso dalla scrittura posizionale $n = (30213)_4$. Scrivere n in base due.

Soluzione: $n = (1100100111)_2$.

13 — Conversioni facili ($b^s \rightsquigarrow b$): Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = (73051406)_8$. Scrivere n in base due.

Soluzione: $n = (111011000101001100000110)_2$.

14 — Conversioni facili ($b^s \rightsquigarrow b / b \rightsquigarrow b^r$): Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = (2351)_8$. Scrivere n in base due e in base quattro.

Soluzione: $n = (10011101001)_2$, $n = (103221)_4$.

15 $\hat{\mathbb{Z}}$ — Trovare, se esiste, una base $b \in \mathbb{N}$ con $b > 5$, tale che $(523)_b = (303)_8$.

Soluzione: $b = 6$.

16 — Usando la scrittura posizionale in base cinque, tramite le cinque cifre (ordinate!) 0, 1, 2, 3 e 4, calcolare — senza passare per la scrittura in base dieci — le somme $(1234)_5 + (2321)_5$ e $(3421)_5 + (4023)_5$. Come controprova, risolvere lo stesso problema convertendo prima in base dieci i numeri da sommare, calcolando la somma usando la scrittura posizionale in base dieci, e infine convertire (cioè riscrivere) in base dieci il risultato così ottenuto.

Soluzione: $(1234)_5 + (2321)_5 = (4110)_5$, $(3421)_5 + (4023)_5 = (12444)_5$.

Per la controprova, si ha

$$\begin{aligned}(1234)_5 + (2321)_5 &= (194)_{10} + (336)_{10} = (530)_{10} = (4110)_5 , \\ (3421)_5 + (4023)_5 &= (486)_{10} + (513)_{10} = (999)_{10} = (12444)_5 .\end{aligned}$$

17 $\hat{\mathbb{Z}}$ — Usando la scrittura posizionale in base $b = \text{dodici}$, tramite le dodici cifre (ordinate!) dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$, calcolare — senza passare per la scrittura in base dieci... — la somma $(70\perp 31\wedge 5)_b + (497\wedge \perp 0\wedge)_b$.

Soluzione: $(70\perp 31\wedge 5)_b + (497\wedge \perp 0\wedge)_b = (\wedge \perp 63004)_b$.